Chapitre 3

Fractales et systèmes itératifs de fonctions

MAT-2901 — Mathématiques et technologie



Jérôme Soucy

Université Laval

Plan de l'exposé

1. Des monstres aux fractales

2. La courbe de von Koch

3. Le triangle et le tapis de Sierpiński

4. Autosimilarité

5. La dimension de similitude

6. Systèmes itératifs de fonctions

7. Trouver un SIF : le théorème du collage

8. La dimension de similitude généralisée

9. Dessiner un attracteur à l'ordinateur

10. Des monstres aux modèles

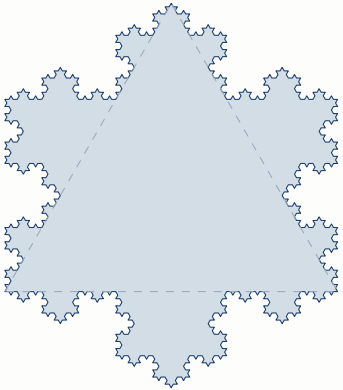
11. Synthèse

Des monstres aux fractales

Ce que les deux premiers chapitres ont préparé

- Chapitre 1 : une transformation affine du plan tient en six nombres ; similitudes et contractions.
- Chapitre 2 : l'espace $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$ des compacts du plan, et le théorème du point fixe de Banach.
- Aujourd'hui : quelques transformations affines suffisent à définir un flocon au contour infiniment dentelé, ou une fougère.
- L'existence de ces figures sera justifiée par Banach, appliqué à l'espace des compacts.

Figure 3.1 — Le flocon de von Koch



Quatrième étape de la construction, superposée au triangle de départ (en pointillé).

À la limite : un contour de longueur infinie, qui délimite une région d'aire finie.

Le mot fractale : Benoît Mandelbrot, 1975, du latin fractus, « brisé ». Des irrégularités à toutes les échelles ; l'agrandissement ne les rend jamais lisses.

Des monstres devenus modèles

- Plusieurs de ces objets sont connus depuis la fin du XIX^{e} siècle : des contre-exemples (courbes continues sans tangente, ensembles troués à l'infini), qu'on appelait des « monstres ».
- L'ordinateur permet de les représenter, et de voir qu'ils décrivent bien des formes naturelles : côtes, nuages, végétaux, réseaux sanguins.

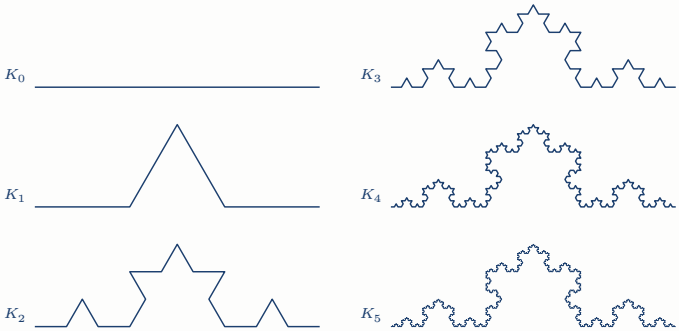
Le chemin du chapitre :

1. deux exemples : la courbe de von Koch, le triangle de Sierpiński ;
2. autosimilarité et dimension de similitude ;
3. systèmes itératifs de fonctions (SIF), justifiés par Banach ;
4. deux algorithmes de dessin ;
5. des monstres de Weierstrass aux modèles de Mandelbrot.

La courbe de von Koch

Figure 3.2 — La construction

Étape K_0 : un segment de longueur 1. On le partage en trois, on remplace le tiers central par les deux autres côtés d'un triangle équilatéral : K_1, quatre segments de longueur $\frac{1}{3}$. On recommence sur chaque segment, et ainsi de suite.



La courbe de von Koch K est la figure limite. Le sens de cette limite, dans $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$, sera justifié en section 6.

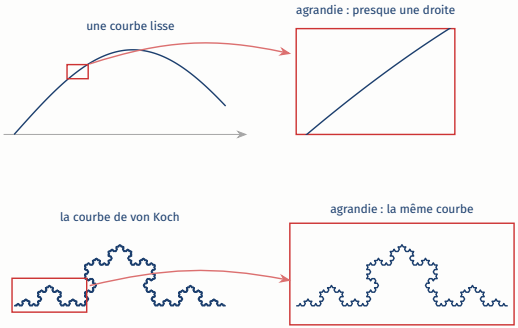
Première propriété : sa longueur est infinie

À chaque étape, chaque segment est remplacé par quatre segments trois fois plus courts : la longueur est multipliée par $\frac{4}{3}$.

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

- $L_{10} \approx 17{,}8$; $L_{50} \approx 1{,}8 \times 10^6$.
- Si K_0 mesure un centimètre, K_{50} est plus longue que la distance de Québec à Montréal — et pourtant la figure tient sur un timbre-poste.
- Aucune longueur finie ne peut être attribuée à K.

Figure 3.3 — Deuxième propriété : aucune tangente



Une courbe lisse, vue de près, ressemble à sa tangente. Le premier quart de K, agrandi trois fois, redonne K tout entière : aucune échelle ne la rend lisse. On démontre qu'elle n'a de tangente en aucun point.

Le flocon de von Koch

Trois courbes de von Koch sur les côtés d'un triangle équilatéral, pointes vers l'extérieur : le flocon de la figure 3.1.

- Son contour, formé de trois courbes de longueur infinie, est de longueur infinie.
- L'aire qu'il délimite est finie : le flocon tient dans tout disque qui contient le triangle de départ.
- Le calcul exact de cette aire, par une série géométrique, est un exercice du chapitre.

Note historique 3.1 — Helge von Koch (1870–1924)



Helge von Koch (1870–1924). Domaine public, Wikimedia Commons.

- Né à Stockholm ; élève de Gösta Mittag-Leffler, lui-même disciple de Weierstrass. Thèse (1892) sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires.
- Succède à Mittag-Leffler à l'université de Stockholm (1911).
- 1901 : l'hypothèse de Riemann équivaut à une estimation précise de l'erreur commise en comptant les nombres premiers par le logarithme intégral.
- 1904 : « Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire ».

Note historique 3.1 (suite)

- Trente ans plus tôt, Weierstrass avait exhibé une fonction continue dérivable nulle part (section 10) — mais définie par une série trigonométrique, difficile à interpréter géométriquement.
- Von Koch voulait montrer le même phénomène par une construction qu'on puisse faire à la règle et au compas.
- Trois quarts de siècle plus tard, son flocon devient l'une des figures les plus connues de la géométrie fractale.

Le triangle et le tapis de Sierpiński

Figure 3.4 — Construction par retraits successifs

S_0 : un triangle équilatéral plein de côté 1. On joint les milieux des côtés, on retire (l'intérieur du) triangle central : S_1, trois triangles de côté $\frac{1}{2}$. On recommence dans chacun.



Le triangle de Sierpiński est $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

- Les S_n sont des points de $\left(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H\right)$: $S_n \to S$ veut dire $d_H(S_n, S) \to 0$ (définition 2.10).
- Comme $S_{n+1} \subseteq S_n$: $S = S_0 \cap S_1 \cap S_2 \cap \cdots$, les points jamais retirés.

Ni aire, ni longueur

Chaque triangle est remplacé par trois triangles de côté moitié, donc d'aire quatre fois plus petite (facteur k^2, chapitre 1) :

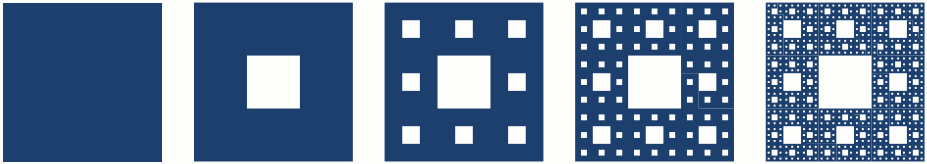
$$\mathrm{Aire}(S_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\sqrt{3}}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

- S est contenu dans chaque S_n : son aire est nulle.
- Mais S n'est pas vide : il contient les côtés de tous les petits triangles, qu'aucune étape ne retire.
- Les contours des 3^n triangles de S_n, tous contenus dans S, mesurent déjà $3^n \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$.

Ni l'aire ni la longueur ne donnent une mesure finie et non nulle : la dimension de similitude (section 5) éclairera cette situation.

Figure 3.5 — Le tapis de Sierpiński

Même procédé sur le carré unité : on le partage en neuf carrés de côté $\frac{1}{3}$, on retire celui du centre, on recommence dans les huit autres.



T_0 T_1 T_2 T_3 T_4

T_n : 8^n carrés de côté $\left(\frac{1}{3}\right)^n$; son aire, $\left(\frac{8}{9}\right)^n$, tend vers zéro.

Remarque 3.1 — L'ensemble de Cantor

Remarque 3.1

Sur $[0,1]$: on retire le tiers central ouvert $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, puis le tiers central de chacun des deux segments restants, et ainsi de suite (Cantor, 1883).



- Longueur totale nulle : il reste 2^n segments de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, soit $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$.
- Pourtant « autant » de points que le segment entier : ce sont exactement les nombres de $[0,1]$ qui s'écrivent en base 3 sans le chiffre 1.

Note historique 3.2 — Wacław Sierpiński (1882–1969)



Wacław Sierpiński, en 1928. Domaine public, Wikimedia Commons.

- Né à Varsovie, alors sous domination russe ; élève de Gueorgui Voronoï. Enseigne dans une école secondaire de filles, puis doctorat à Cracovie (1906).
- À Lwów, en 1909, l'un des tout premiers cours universitaires entièrement consacrés à la théorie des ensembles.
- Surpris en Russie par la Première Guerre mondiale, interné comme ressortissant ennemi (Viatka, puis Moscou), il travaille avec Nikolaï Louzine.
- C'est là qu'il publie le triangle (1915) et le tapis (1916).

Note historique 3.2 (suite)

- Ces constructions servaient la topologie : le triangle est une courbe dont chaque point est un point de ramification ; le tapis est universel (il contient une copie de toute courbe plane).
- 1920 : fonde, avec Stefan Mazurkiewicz, la revue Fundamenta Mathematicae, où publiera Banach.
- Sous l'occupation, enseigne dans l'université clandestine de Varsovie ; perd sa bibliothèque et ses manuscrits dans l'incendie de sa maison en 1944.
- Plus de 700 articles, une cinquantaine de livres, et une famille d'entiers à son nom : les nombres de Sierpiński.

Pour la classe 3.1 et outil 3.1

Pour la classe — Les suites géométriques dans les constructions fractales

La raison d'une suite prend un sens géométrique : longueur multipliée par $\frac{4}{3}$, aire par $\frac{3}{4}$. En 4^{e} ou 5^{e} secondaire : construire K_0 à K_3 sur du papier pointé isométrique, calculer les longueurs, reconnaître une suite géométrique. Une longueur qui croît sans borne dans une région bornée : une occasion de parler de limite avant de la définir.

Outil — Construire la courbe de von Koch dans GeoGebra

Sur un segment $[AB]$: points au tiers et aux deux tiers, sommet par une rotation de $60°$, quatre segments. Le menu Outils $\rightarrow$ Créer un nouvel outil en fait un outil (deux points $\rightarrow$ quatre segments), qu'on applique à chaque segment : K_2, puis K_3. On voit l'idée des SIF — remplacer chaque segment par une copie réduite — et pourquoi il faut vite un programme : le nombre de segments est multiplié par 4 à chaque étape.

Autosimilarité

Des copies réduites d'elle-même

- Figure 3.3 : le premier quart de K, agrandi trois fois, redonne K. Idem pour les trois autres quarts (en les faisant aussi tourner) : K est formée de quatre copies réduites d'elle-même.
- Le triangle de Sierpiński : trois copies de lui-même, deux fois plus petites, dans ses trois coins.
- Langage du chapitre 1 : une similitude de rapport r multiplie les distances par r ; si $0 < r < 1$, c'est une contraction de rapport r (définition 2.14).

Définition 3.1 — Ensemble autosimilaire

Définition 3.1 — Ensemble autosimilaire

Soit E un sous-ensemble compact non vide du plan. E est autosimilaire s'il existe un nombre fini $N \geq 2$ de similitudes $w_1, \dots, w_N$, de rapports $r_1, \dots, r_N$ compris strictement entre 0 et 1, telles que

$$E = w_1(E) \cup w_2(E) \cup \cdots \cup w_N(E).$$

Chaque $w_i(E)$ est une copie réduite de E.

- E doit être exactement la réunion de ses copies.
- Les copies peuvent se toucher, et même se chevaucher (on y revient en section 8).

Exemple 3.1 — Le segment et le carré

- $[0,1]$ est la réunion de $[0, \frac{1}{2}]$ et de $[\frac{1}{2}, 1]$: deux similitudes de rapport $\frac{1}{2}$ (ou trois de rapport $\frac{1}{3}$, ou m de rapport $\frac{1}{m}$).
- Le carré unité C est la réunion de quatre carrés de côté $\frac{1}{2}$:
  $C = w_1(C) \cup w_2(C) \cup w_3(C) \cup w_4(C)$, avec

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i,$$

  $\mathbf{t}_i$ parcourant $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exemple 3.2 — Tout triangle est autosimilaire

En joignant les milieux des côtés de T, on obtient quatre triangles semblables à T, de rapport $\frac{1}{2}$:

- trois copies de coin : $h_{A,1/2}(T)$, $h_{B,1/2}(T)$, $h_{C,1/2}(T)$;
- la copie centrale, qui a subi un demi-tour : $h_{G,-1/2}(T)$, où G est le centre de gravité.

$$T = h_{A,1/2}(T) \cup h_{B,1/2}(T) \cup h_{C,1/2}(T) \cup h_{G,-1/2}(T).$$

L'autosimilarité ne suffit donc pas à caractériser une fractale.

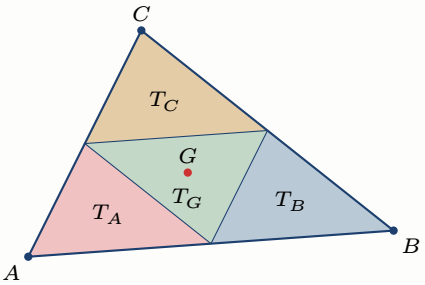


Figure 3.6

Exemples 3.3 et 3.4 — Sierpiński et von Koch

Sierpiński, sommets $S_1 = (0,0)$, $S_2 = (1,0)$, $S_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $w_i = h_{S_i,1/2}$:

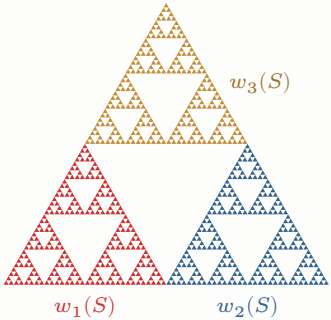
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

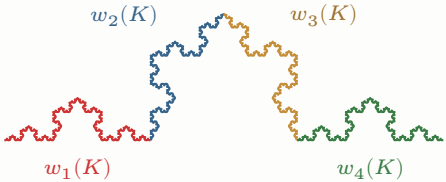
Von Koch, sur le segment de $(0,0)$ à $(1,0)$, avec les rotations $r_{\pm\pi/3}$:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\, r_{\pi/3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\, r_{-\pi/3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, \quad w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification : w_2 envoie $(1,0)$ sur $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$, le sommet de la pointe. Sierpiński est aussi formé de neuf copies de rapport $\frac{1}{4}$, les $w_i \circ w_j$.

Figure 3.7 — Les copies réduites





Tapis : huit homothéties de rapport $\frac{1}{3}$. Cantor : deux copies, $\frac{1}{3}x$ et $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Remarque 3.2 et pour la classe 3.2

Remarque 3.2 — Une autosimilarité parfois seulement statistique

Une côte rocheuse, un chou-fleur, un réseau de rivières ne sont jamais exactement autosimilaires : un morceau agrandi ne reproduit pas le tout, mais en a les caractéristiques statistiques, et seulement sur une plage d'échelles (pas au grain de sable). C'est l'autosimilarité statistique, au cœur des travaux de Mandelbrot.

Pour la classe — Une figure semblable à une partie d'elle-même

Une figure autosimilaire est une figure semblable à chacune de ses parties. Les élèves joignent les milieux des côtés d'un triangle, mesurent, constatent quatre petits triangles isométriques semblables au grand, de rapport $\frac{1}{2}$. Recommencer dans chaque petit triangle en noircissant celui du centre amorce la construction de Sierpiński.

La dimension de similitude

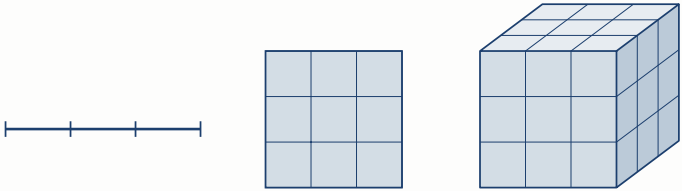
Entre les courbes et les surfaces

- Sierpiński : aire nulle, mais des segments de longueur totale infinie.
- Von Koch : longueur infinie, et aire nulle. La courbe sur un segment de longueur ℓ tient dans un triangle isocèle d'aire $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^2$; appliqué aux 4^n segments de K_n :

$$4^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0.$$

Une notion de dimension va situer ces objets entre les courbes et les surfaces, du point de vue de la mesure.

Figure 3.8 — Compter les copies



$s = 3, N = 3 = 3^1$ $s = 3, N = 9 = 3^2$ $s = 3, N = 27 = 3^3$

Chaque arête divisée en s parties : $N = s^d$ copies de rapport $r = \frac{1}{s}$, où d est la dimension usuelle :

$$N = s^d \iff N = \left(\frac{1}{r}\right)^d \iff d = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}.$$

C'est le facteur k^2 (aires) et k^3 (volumes) du chapitre 1, lu à l'envers.

Définition 3.2 — Dimension de similitude

Définition 3.2 — Dimension de similitude

Soit E un ensemble autosimilaire, réunion de N copies $w_1(E), \dots, w_N(E)$ de même rapport $r \in]0,1[$, qui ne se chevauchent pas. La dimension de similitude de E est

$$\dim_{\text{sim}}(E) = \frac{\ln N}{\ln(1/r)},$$

c'est-à-dire l'unique réel d tel que $Nr^d = 1$.

Un même ensemble se découpe de plusieurs façons, mais la dimension ne change pas : N copies de rapport r donnent, en redécoupant, N^m copies de rapport r^m, et $\ln N^m / \ln(1/r^m) = \ln N / \ln(1/r)$. Par exemple, pour Sierpiński, $\ln 9 / \ln 4 = \ln 3 / \ln 2$.

Exemple 3.5 — Quelques dimensions de similitude

Ensemble	N	r	$\dim_{\text{sim}}(E) = \ln N / \ln(1/r)$
Ensemble de Cantor	2	$\frac{1}{3}$	$\ln 2 / \ln 3 \approx 0{,}630\,9$
Segment	3	$\frac{1}{3}$	1
Courbe de von Koch	4	$\frac{1}{3}$	$\ln 4 / \ln 3 \approx 1{,}261\,9$
Triangle de Sierpiński	3	$\frac{1}{2}$	$\ln 3 / \ln 2 \approx 1{,}585\,0$
Tapis de Sierpiński	8	$\frac{1}{3}$	$\ln 8 / \ln 3 \approx 1{,}892\,8$
Carré	9	$\frac{1}{3}$	2

Cantor : entre un point et un segment. Von Koch : au-delà d'une courbe. Tapis : presque une surface, malgré son aire nulle.

Ce que mesure la dimension (raisonnement heuristique)

Supposons une « taille d-dimensionnelle » M_d (longueur, aire, volume pour $d = 1, 2, 3$) telle que $M_d(w(E)) = r^d M_d(E)$ pour toute similitude de rapport r. Si E est la réunion de N copies sans chevauchement :

$$M_d(E) = N\, r^d\, M_d(E).$$

Si $Nr^d = 1$ ($d = \dim_{\text{sim}} E$), toute valeur convient ; sinon $M_d(E)$ est nulle ou infinie. Pour von Koch :

- $d = 1 : 4 \cdot \frac{1}{3} \neq 1$; pas nulle (deux points à distance 1), donc la longueur est infinie ;
- $d = 2 : 4 \cdot \frac{1}{9} \neq 1$; pas infinie (K est borné), donc l'aire est nulle ;
- seule $d = \ln 4 / \ln 3$ peut donner une valeur finie non nulle.

Mesurer une surface avec une longueur donne l'infini ; l'aire d'un fil idéal est nulle.

Remarque 3.3 — La dimension de Hausdorff; qu'est-ce qu'une fractale ?

Remarque 3.3 — La dimension de Hausdorff

Le raisonnement reste heuristique : on n'a pas construit M_d. Hausdorff l'a fait en 1918, pour tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et tout $d \geq 0$: c'est la dimension de Hausdorff. Pour un ensemble autosimilaire sans chevauchement, elle coïncide avec la dimension de similitude (Hutchinson, 1981).

- Mandelbrot : une fractale est un ensemble dont la dimension de Hausdorff dépasse strictement la dimension topologique (0 pour des points isolés, 1 pour une courbe, 2 pour une surface). Il a lui-même reconnu que cette définition exclut des cas voulus.
- Pour nous, une fractale : un ensemble irrégulier à toutes les échelles, dont la forme se reproduit (exactement ou à peu près) dans ses parties, et de dimension typiquement fractionnaire.
- Réserve : le tétraèdre de Sierpiński est une fractale de dimension exactement 2.

Pour la classe 3.3 — Logarithmes et échelles de mesure

Pour la classe — Logarithmes et échelles de mesure

- $3^d = 4$ n'a pas de solution entière : on passe aux logarithmes, dans la base de son choix, $\log 4 / \log 3 = \ln 4 / \ln 3 = \log_3 4$ (changement de base, 5^{e} secondaire).
- La dimension est un exposant : « à quelle puissance élever le facteur de réduction pour obtenir le nombre de copies ? »
- Même idée dans les échelles logarithmiques : Richter (un séisme de magnitude 6 produit des ondes dix fois plus amples qu'un séisme de magnitude 5, et libère environ $10^{1,5} \approx 32$ fois plus d'énergie), pH, décibels.
- Calculer la magnitude de séismes historiques, puis la dimension de quelques fractales : deux applications d'un même outil.

Systèmes itératifs de fonctions

La question à l'envers

Jusqu'ici, on a reconnu des copies à l'intérieur d'une figure donnée. Inversons : des contractions $w_1, \dots, w_N$ du plan étant données,

- existe-t-il un ensemble E tel que $E = w_1(E) \cup \cdots \cup w_N(E)$?
- est-il unique ?
- comment le construire ?

Réponse : le théorème de Banach, appliqué à $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$.

Définition 3.3 — Système itératif de fonctions

Définition 3.3 — Système itératif de fonctions

Un système itératif de fonctions (SIF) du plan est une famille finie $\{w_1, \dots, w_N\}$ de contractions $w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de rapports $k_1, \dots, k_N$. Le nombre $k = \max\{k_1, \dots, k_N\}$ est le rapport de contraction du SIF. Son opérateur de Hutchinson associe à un compact non vide B la réunion de ses images :

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \cdots \cup w_N(B).$$

- Dans ce cours, les w_i sont toujours affines.
- W agit sur des figures : un « photocopieur à plusieurs lentilles » (Barnsley). En anglais : iterated function system (IFS).

Remarque 3.4 — Le rapport de contraction d'une application affine

Remarque 3.4

Pour $w(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$: le plus grand facteur par lequel A allonge un vecteur, $\max \|A\mathbf{u}\|$ sur les vecteurs unitaires.

- Similitude : son rapport. Diagonale $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$: $\max\{|a|, |b|\}$ (le rapport $\frac{2}{3}$ de l'exemple 2.10).
- A symétrique : la plus grande valeur propre en valeur absolue.
- Mais pas en général : le cisaillement $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'a que la valeur propre $\frac{1}{2}$, et pourtant il envoie $(0, 1)$ sur $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, de norme $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$: ce n'est pas une contraction.
- Cas général : racine carrée de la plus grande valeur propre de $A^{\mathsf{T}}A$.

Théorème 3.1 — Première hypothèse de Banach

Il faut vérifier que W envoie $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ dans lui-même (admis : une contraction est continue, l'image continue d'un compact est compacte, une réunion finie de compacts est compacte), puis :

Théorème 3.1 — L'opérateur de Hutchinson est une contraction

Soit un SIF de rapport k. Son opérateur W est une contraction de rapport k de $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$: $d_H(W(A), W(B)) \leq k\, d_H(A, B)$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Avec les ε-voisinages (définition 2.8) : si $A \subseteq B^{\oplus\varepsilon}$, alors $w_i(A) \subseteq w_i(B)^{\oplus k\varepsilon}$; réunir sur i (annexe C des notes).

Théorème 3.2 — L'espace des compacts est complet

Théorème 3.2 — Complétude de l'espace des compacts

L'espace métrique $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$ est complet.

(Admis — dû à Hausdorff; une démonstration se trouve chez Barnsley.)

Les deux hypothèses du théorème de Banach (forme générale, remarque 2.11) sont réunies : un espace complet et une contraction.

Théorème 3.3 — Hutchinson (1981)

Théorème 3.3 — Hutchinson, 1981

Soit un SIF du plan de rapport k, d'opérateur de Hutchinson W.

(i) Il existe un unique compact non vide A tel que $A = W(A) = w_1(A) \cup \cdots \cup w_N(A)$;

(ii) pour tout compact non vide B, la suite $B, W(B), W^2(B), \ldots$ converge vers A au sens de d_H ;

(iii) $d_H(W^n(B), A) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d_H(B, W(B))$.

L'ensemble A s'appelle l'attracteur du SIF.

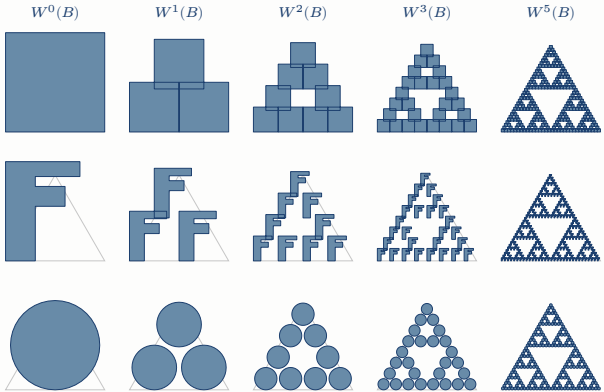
DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Banach (forme générale) : W contraction (th. 3.1) d'un espace complet (th. 3.2).

Un point fixe qui est une figure

- Le « point fixe » garanti par Banach n'est pas un point du plan, mais une figure entière : l'attracteur.
- La suite qui y converge n'est pas une suite de points, mais une suite de figures.
- Le point (ii) dit de plus que la limite ne dépend pas de la figure de départ.
- Une démonstration courte, parce qu'elle s'appuie sur tout ce qui a été construit aux chapitres 1 et 2.

Figure 3.9 — La figure de départ n'a pas d'importance



Le SIF de Sierpiński appliqué à un carré, au motif « F » et à un disque : chaque fois le même attracteur (point (ii)).

Remarque 3.5 — Les constructions des sections 2 et 3 sont justifiées

Remarque 3.5

- Le sens de la limite : le SIF de l'exemple 3.4 appliqué à K_0 donne exactement K_1, puis $K_2 = W(K_1)$, etc. La courbe de von Koch est la limite de $K_n = W^n(K_0)$ au sens de d_H. De même $S_n = W^n(S_0)$.
- L'autosimilarité : un ensemble autosimilaire $E = w_1(E) \cup \cdots \cup w_N(E)$ est un point fixe de W ; par unicité, c'est l'attracteur.

Les ensembles autosimilaires sont exactement les attracteurs des SIF de similitudes.

Exemple 3.6 — Combien d'étapes pour le dessin ?

Sierpiński dans un triangle de 10 cm de côté, à un dixième de millimètre près, soit $0{,}001$ fois le côté.

- $S_1 \subseteq S_0$; le point de S_0 le plus loin de S_1 est le centre du triangle retiré : $d_H(S_0, S_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}$.
- Avec $k = \frac{1}{2}$, le point (iii) donne

$$d_H(S_n, S) \leq \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

- Environ $0{,}001\,13$ pour $n = 8$ et $0{,}000\,56$ pour $n = 9$: neuf étapes, soit $3^9 = 19\,683$ triangles.

Remarque 3.6 — Les points fixes des w_i sont dans l'attracteur

Remarque 3.6

Chaque w_i a un unique point fixe $\overline{x}_i$ (Banach). Partant de $a \in A$, la suite $a, w_i(a), w_i^2(a), \ldots$ reste dans A (car $w_i(A) \subseteq W(A) = A$) et converge vers $\overline{x}_i$; A étant fermé, $\overline{x}_i \in A$.

- Pour Sierpiński : les trois sommets S_1, S_2, S_3.
- En appliquant des composées des w_i à ces points, on obtient d'autres points de A — le principe de l'algorithme déterministe (section 9).

Trouver un SIF : le théorème du collage

Théorème 3.4 — Théorème du collage (Barnsley)

Le problème inverse : à partir d'une image (feuille, arbre, texture), trouver un SIF dont l'attracteur s'en approche.

Théorème 3.4 — Théorème du collage

Soit L un compact non vide du plan, et un SIF de rapport k, d'attracteur A et d'opérateur W. Alors

$$d_H(L, A) \leq \frac{1}{1-k}\, d_H(L, W(L)).$$

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Point (iii) du théorème 3.3 avec $B = L$ et $n = 0$.

Recouvrir L par des photocopies réduites et déformées d'elle-même (un collage) : si le collage est fidèle, l'attracteur ressemble à L. L'estimation se dégrade si k est proche de 1.

Trouver chaque w_i : retour au bulldozer

- Par le théorème des trois points (chapitre 1), une application affine est déterminée par les images de trois points non alignés.
- On repère trois points caractéristiques de L (base de la tige, pointe, extrémité d'une feuille) et leurs positions sur la pièce L_i voulue.
- On résout les deux systèmes 3×3 du chapitre 1 : on obtient w_i.

Exemple 3.7 — Un arbre

- Le tronc : $w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0 \\ 0 & 0{,}42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'arbre réduit à un mince segment.
- Deux branches : similitudes de rapport $0{,}58$, tournées de $\pm 38°$, posées au sommet du tronc : $w_{2,3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0{,}58\, r_{\pm 38°} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}42 \end{pmatrix}$.
- La cime : $w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0{,}42 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Rapport de contraction : $0{,}58$. Comme w_1 n'est pas une similitude, l'attracteur n'est pas autosimilaire au sens de la définition 3.1.

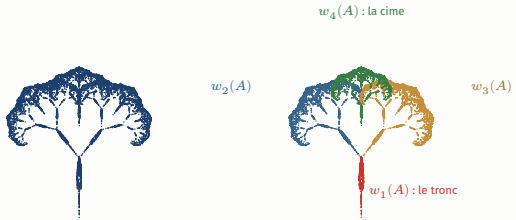


Figure 3.10

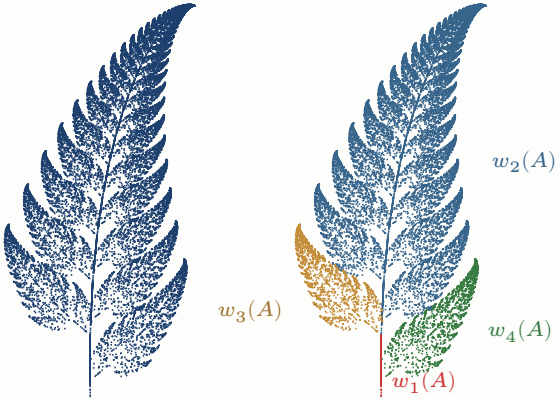
Exemple 3.8 — La fougère de Barnsley (1988)

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} :$$

i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i	p_i
1	0	0	0	0,16	0	0	0,01
2	0,85	0,04	−0,04	0,85	0	1,6	0,85
3	0,20	−0,26	0,23	0,22	0	1,6	0,07
4	−0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44	0,07

- w_1 écrase tout sur un petit segment vertical, la base de la tige : déterminant nul (application non inversible, ce que la définition 3.3 permet).
- w_2 : similitude de rapport $\sqrt{0{,}85^2 + 0{,}04^2} \approx 0{,}851$, rotation d'environ $3°$ en sens horaire ; elle envoie la fougère sur la fougère privée de sa première paire de folioles.
- w_3, w_4 : les deux folioles du bas ; w_4 a un déterminant négatif, elle retourne la fougère.
- La colonne p_i servira au jeu du chaos (section 9).

Figure 3.11 — La fougère et ses quatre pièces



Vingt-quatre coefficients ; les folioles du bas sont elles-mêmes de petites fougères.

Remarque 3.7 — La compression fractale d'images

Remarque 3.7

- La fougère : vingt-quatre nombres, contre des centaines de milliers pour une image matricielle.
- Fin des années 1980 : Barnsley et son étudiant Arnaud Jacquin en tirent la compression fractale. L'image est découpée en petits blocs ; pour chacun, on cherche une application affine qui l'obtient à partir d'un bloc plus grand de la même image (principe du collage).
- Utilisée commercialement, notamment dans l'encyclopédie Encarta de Microsoft, avant d'être supplantée par JPEG.

La dimension de similitude généralisée

Des copies de rapports différents

Si $E = w_1(E) \cup \cdots \cup w_N(E)$, où w_i est une similitude de rapport r_i, sans chevauchement, l'argument heuristique de la section 5 donne

$$M_d(E) = r_1^d \, M_d(E) + r_2^d \, M_d(E) + \cdots + r_N^d \, M_d(E),$$

possible avec une taille finie non nulle seulement si $r_1^d + \cdots + r_N^d = 1$.

Proposition 3.5 — L'équation de Moran

Proposition 3.5 — L'équation de Moran

Soient $N \geq 2$ et $r_1, \dots, r_N \in]0,1[$. L'équation

$$r_1^d + r_2^d + \cdots + r_N^d = 1 \tag{3.1}$$

possède une unique solution $d > 0$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

$\varphi(d) = \sum r_i^d = \sum \mathrm{e}^{d \ln r_i}$ est continue et strictement décroissante ; $\varphi(0) = N > 1$, $\varphi(d) \to 0$; valeurs intermédiaires.

Outil 3.2 — Résoudre l'équation de Moran

Outil — Résoudre l'équation de Moran

- (3.1) ne se résout pas algébriquement en général, mais très bien graphiquement. Dans Desmos : tracer $y = 2(1/2)^x + 3(1/3)^x$ et $y = 1$, puis cliquer sur l'intersection.
- Le graphe illustre la démonstration : courbe décroissante, qui part de N en $x = 0$ et tend vers 0.
- WolframAlpha : `solve 2(1/2)^d + 3(1/3)^d = 1`.
- En 5^{e} secondaire : comparer avec la résolution par logarithmes du cas $Nr^d = 1$ — ce que les logarithmes permettent, et ce qu'ils ne permettent pas.

Définitions 3.4 et 3.5 — Ne pas se chevaucher

Définition 3.4 — Condition de l'ouvert (Moran)

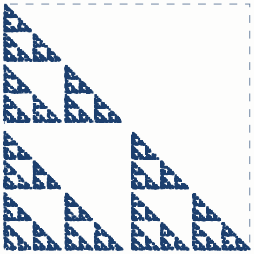
Le SIF $\{w_1, \dots, w_N\}$ satisfait la condition de l'ouvert s'il existe un ouvert borné non vide V tel que (a) $w_i(V) \subseteq V$ pour tout i, et (b) les $w_i(V)$ sont deux à deux disjoints.

Sierpiński : V = l'intérieur du triangle de départ. Ses trois images sont disjointes, car les triangles ne se touchent qu'en des sommets, sur leurs frontières. Ouvert et frontière (chapitre 2) interviennent directement.

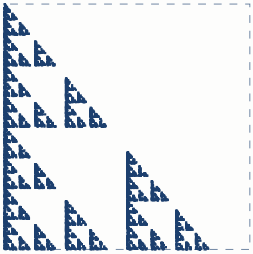
Définition 3.5 — Dimension de similitude généralisée

Soit E l'attracteur d'un SIF de similitudes de rapports $r_1, \dots, r_N$ qui satisfait la condition de l'ouvert. Sa dimension de similitude généralisée est l'unique solution d de (3.1).

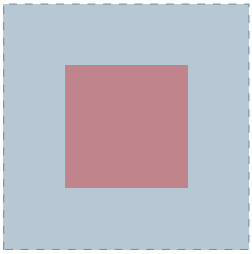
Figure 3.12 — Trois SIF de similitudes



(a) trois copies de rapport $0{,}48$: disjointes



(b) deux copies de rapport $\frac{1}{2}$, une de rapport $0{,}4$: elles se touchent



(c) cinq copies de rapport $\frac{1}{2}$: elles se chevauchent

Le carré unité ouvert V en pointillé. En (a) et (b), la condition de l'ouvert est satisfaite ; en (c), la cinquième image chevauche les quatre autres.

Exemple 3.9 — Pourquoi la condition de l'ouvert est nécessaire

Cas (c) : cinq homothéties de rapport $\frac{1}{2}$, qui envoient le carré unité C sur ses quatre quarts et sur le carré de côté $\frac{1}{2}$ centré en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- Les quatre coins reconstituent déjà C, et la cinquième copie est contenue dans C : $W(C) = C$, l'attracteur est le carré plein, de dimension 2.
- Moran donnerait $5\left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$, soit $d = \ln 5 / \ln 2 \approx 2{,}32$ — impossible pour un ensemble plan.
- Le chevauchement fait compter plusieurs fois certaines parties du carré.

Exemple 3.10 — Le calcul numérique d'une dimension

Cas (b) : on résout $f(d) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^d + (0{,}4)^d - 1 = 0$ par la méthode de Newton (chapitre 2), avec $f'(d) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^d \ln\frac{1}{2} + (0{,}4)^d \ln(0{,}4)$ et $d_0 = 1$:

n	d_n	$f(d_n)$
0	$1{,}000\,000\,000$	$4{,}0 \times 10^{-1}$
1	$1{,}377\,478\,332$	$5{,}3 \times 10^{-2}$
2	$1{,}444\,094\,153$	$1{,}3 \times 10^{-3}$
3	$1{,}445\,852\,445$	$8{,}9 \times 10^{-7}$
4	$1{,}445\,853\,630$	$4{,}0 \times 10^{-13}$

$d \approx 1{,}445\,85$: entre $\ln 3 / \ln(2{,}5) \approx 1{,}199$ (trois copies de rapport $0{,}4$) et $\ln 3 / \ln 2 \approx 1{,}585$ (trois copies de rapport $\frac{1}{2}$).

Remarque 3.8 — Et pour les SIF qui ne sont pas des similitudes ?

Remarque 3.8

La définition 3.5 ne vaut que pour des similitudes. L'arbre, la fougère, tout attracteur d'applications affines quelconques : une application qui écrase davantage dans une direction ne multiplie pas une « taille d-dimensionnelle » par un facteur bien défini.

La dimension de ces ensembles auto-affines demande d'autres outils, et fait encore l'objet de recherches actives.

Dessiner un attracteur à l'ordinateur

Dessiner un attracteur à l'ordinateur

L'algorithme déterministe

Algorithme 3.1 — Algorithme déterministe

Le point (ii) de Hutchinson : partir d'une figure quelconque et appliquer W assez de fois. La figure la plus simple : un seul point (un singleton est un compact non vide).

Algorithme 3.1 — Algorithme déterministe

Données : un SIF $\{w_1, \dots, w_N\}$; un nombre d'étapes n.

1. Choisir un point de départ P_0 ; poser $\mathcal{P} = \{P_0\}$.
2. Répéter n fois : remplacer $\mathcal{P}$ par $W(\mathcal{P}) = w_1(\mathcal{P}) \cup \cdots \cup w_N(\mathcal{P})$.
3. Dessiner les points de $\mathcal{P}$.

Les notes donnent la mise en œuvre en Python : un nuage de points est un tableau $2 \times n$, une application affine un couple $(A, \mathbf{t})$.

Ce que garantit l'algorithme, et sa limite

Sierpiński, départ en l'origine (point fixe de w_1, donc dans S), huit étapes : 3^8 points, tous dans S, et répartis partout :

$$d_H(W^8(\{O\}), S) = d_H(W^8(\{O\}), W^8(S)) \leq (\tfrac{1}{2})^8 d_H(\{O\}, S) \leq (\tfrac{1}{2})^8 \approx 0{,}004.$$

La limite : l'étape n compte N^n points.

- Sierpiński : $N = 3$, $k = \frac{1}{2}$, une dizaine d'étapes suffit.
- Fougère : $N = 4$ et un rapport voisin de $0{,}85$; pour que $0{,}85^n < 10^{-3}$, il faut $n \approx 40$, soit $4^{40} \approx 1{,}2 \times 10^{24}$ points. Impraticable.

Dessiner un attracteur à l'ordinateur

Le jeu du chaos

Le jeu du chaos, avec un dé

Trois sommets A, B, C, un point de départ P_0 quelconque. On lance un dé : 1 ou $2 \to A$; 3 ou $4 \to B$; 5 ou $6 \to C$. On marque P_1 à mi-chemin entre P_0 et le sommet choisi ; on relance, et ainsi de suite.

Avancer à mi-chemin vers S_i, c'est appliquer $h_{S_i,1/2}(P) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}S_i$: l'une des trois applications du SIF de Sierpiński. On applique une seule w_i, tirée au hasard, plutôt que toutes à la fois.

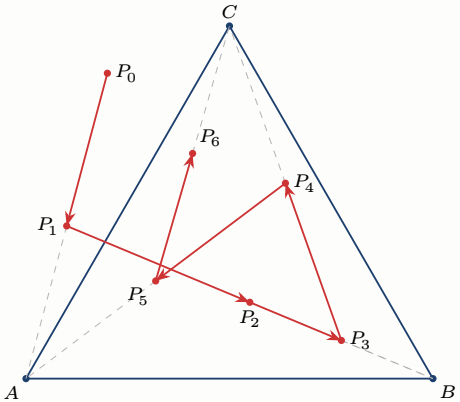
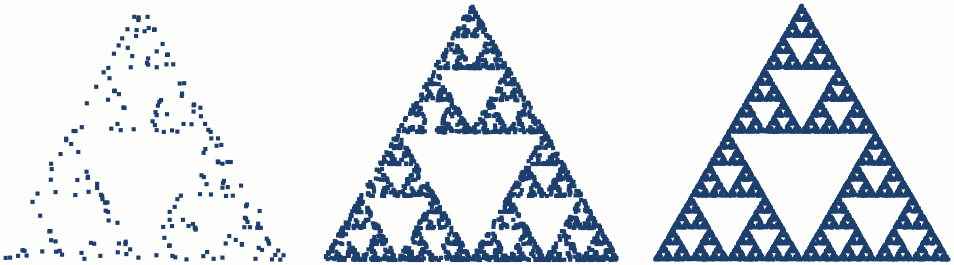


Figure 3.13 — Sommets tirés : A, B, B, C, A, C.

Figure 3.14 — Le hasard dessine une figure déterminée



Après 200, $2\,000$ et $15\,000$ coups (les vingt premiers points omis) : le triangle de Sierpiński apparaît.

Proposition 3.6 — Le jeu du chaos se rapproche de l'attracteur

Proposition 3.6

Soit A l'attracteur d'un SIF de rapport k, et P_0 un point quelconque. Si $P_{m+1} = w_{i_m}(P_m)$, les indices i_m étant choisis de façon arbitraire, alors

$$d(P_m, A) \leq k^m \, d(P_0, A) \qquad \text{pour tout } m \in \mathbb{N},$$

où $d(P, A) = \min_{a \in A} d_E(P, a)$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Prendre $a \in A$ le plus proche de P ; $w_i(a) \in A$, donc $d(w_i(P), A) \leq d_E(w_i(P), w_i(a)) \leq k \, d(P, A)$; récurrence.

Pour Sierpiński, après vingt coups, la distance est multipliée par $2^{-20} \approx 10^{-6}$: on omet donc les premiers points.

Pourquoi le nuage recouvre tout l'attracteur

La proposition 3.6 explique que les points se rapprochent de A, pas qu'ils le recouvrent en entier.

- A est la réunion des N^m petites pièces $w_{j_1} \circ \cdots \circ w_{j_m}(A)$, de taille au plus k^m fois celle de A.
- Si les m derniers tirages ont été $j_m, \ldots, j_1$, le point courant tombe (à une erreur négligeable près) dans la pièce correspondante.
- Chaque suite de m tirages a une probabilité strictement positive : sur un grand nombre de coups, elle se produit, et même régulièrement.

Toutes les petites pièces finissent par être visitées.

Algorithme 3.2 — Jeu du chaos

Algorithme 3.2 — Jeu du chaos

Données : un SIF $\{w_1, \dots, w_N\}$; des probabilités $p_1, \dots, p_N > 0$ de somme 1 ; un nombre de points n.

1. Choisir un point de départ P quelconque.
2. Répéter $n + 20$ fois :
   (a) tirer un indice i, avec probabilité p_i ;
   (b) remplacer P par $w_i(P)$;
   (c) si plus de vingt tirages ont eu lieu, dessiner P.

Coût proportionnel au nombre de points dessinés, et non plus exponentiel en le nombre d'étapes : la fougère en une fraction de seconde.

Choisir les probabilités

Les p_i (tous > 0) ne changent pas la figure limite, mais la vitesse à laquelle le nuage la recouvre.

- Sierpiński : trois pièces égales, $p_i = \frac{1}{3}$.
- Fougère avec $p_i = \frac{1}{4}$: un point sur quatre sur la minuscule base de la tige ; les folioles restent clairsemées.
- Règle : p_i proportionnel à l'aire de la pièce,

$$p_i \approx \frac{|\det(A_i)|}{|\det(A_1)| + \cdots + |\det(A_N)|}$$

  (un déterminant nul remplacé par une petite valeur positive).
- Fougère : déterminants 0 ; $0{,}724\,1$; $0{,}103\,8$; $-0{,}108\,8$, d'où environ $0{,}77$; $0{,}11$; $0{,}12$ pour les trois dernières pièces. Barnsley retenait $0{,}85$; $0{,}07$; $0{,}07$, et $0{,}01$ pour la tige.

Un SIF avec probabilités décrit aussi une répartition des points (Barnsley et Demko) : utile pour les niveaux de gris.

Pour la classe 3.4 — Le jeu du chaos en classe

Pour la classe — Le jeu du chaos en classe

- Trois sujets du secondaire réunis : géométrie (point milieu, homothétie), probabilités (dé équilibré), notion de limite.
- Chaque élève joue une vingtaine de coups sur un transparent où le même triangle est tracé ; on omet les cinq premiers points, puis on superpose les transparents de la classe.
- Surprise : on attendait une répartition uniforme.
- « Pourquoi jamais de point dans le grand trou central ? » Le milieu d'un segment qui joint un point du triangle à un sommet tombe toujours dans le petit triangle de coin de ce sommet.
- Variante avec les quatre sommets d'un carré : un autre résultat (exercice du chapitre).

Des monstres aux modèles

Des monstres aux modèles

La fonction de Weierstrass

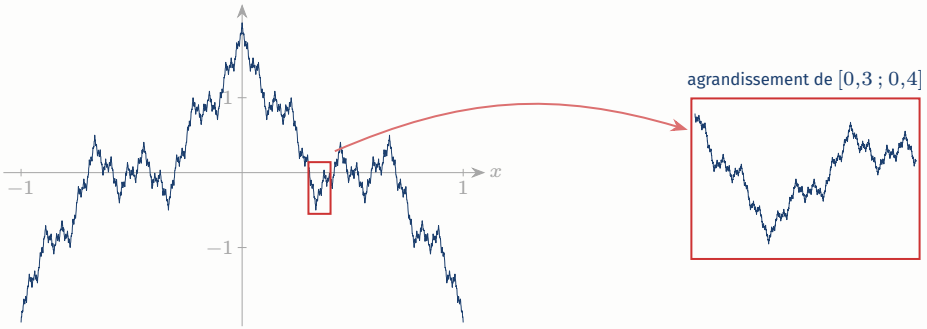
Une fonction continue dérivable nulle part (1872)

Jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle, on tient pour acquis qu'une fonction continue est dérivable, sauf en quelques points isolés. Le 18 juillet 1872, Weierstrass présente

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right), \qquad 0 < a < 1,\ b \text{ entier impair assez grand.}$$

- Chaque terme est lisse ; la série est majorée par $\sum a^n$, et sa somme est continue.
- Pourtant W n'est dérivable en aucun point (Hardy, 1916 : $ab \geq 1$ suffit, d'où $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$).
- Des amplitudes a^n qui décroissent, des fréquences b^n qui croissent beaucoup plus vite : des oscillations de plus en plus petites mais de plus en plus raides ; la pente ne se stabilise jamais.

Figure 3.15 — Le graphe de W, et un agrandissement



$a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, dix-huit termes. Identité $W(x) = \cos(\pi x) + a\, W(bx)$: au terme lisse près, le graphe est une copie de lui-même comprimée d'un facteur b horizontalement et $1/a$ verticalement — une copie auto-affine. Dimension de Hausdorff $2 + \ln a / \ln b \approx 1{,}37$ (démontré en 2018).

« La logique parfois engendre des monstres »

- Hermite à Stieltjes (1893) : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées. »
- Poincaré (1908) :

> La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblent s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Une soixantaine d'années plus tard, ces objets serviront à représenter des côtes, des montagnes et des variations boursières.

Note historique 3.3 — Karl Weierstrass (1815–1897)



Portrait de Conrad Fehr (1895). Domaine public, Wikimedia Commons.

- Né en Westphalie ; envoyé étudier le droit à Bonn, il y passe quatre ans surtout à faire de l'escrime et à fréquenter les tavernes, et repart sans diplôme.
- Près de quinze ans enseignant au secondaire dans de petites villes de Prusse : mathématiques, physique, mais aussi allemand, botanique, géographie, gymnastique, calligraphie.
- Il poursuit ses recherches seul, le soir. Avant l'analyse, il a donc exercé le métier auquel vous vous préparez.

Note historique 3.3 (suite)

- 1854 : un article sur les fonctions abéliennes attire l'attention ; doctorat honorifique de Königsberg ; appelé à Berlin en 1856, à quarante ans.
- L'un des professeurs les plus influents de son siècle : la rigueur de l'analyse moderne, les définitions de limite et de continuité par ε et δ — celles du chapitre 2.
- Élèves : Cantor, Schwarz, Mittag-Leffler (directeur de thèse de von Koch), et Sofia Kovalevskaïa, à qui il donne des leçons privées pendant quatre ans, l'université refusant alors les femmes ; elle devient en 1889 l'une des premières professeures de mathématiques en Europe.
- Sa fonction de 1872 n'est publiée qu'en 1875, par Paul du Bois-Reymond.

Des monstres aux modèles

Mandelbrot et la géométrie de la nature

Combien mesure la côte de la Grande-Bretagne ? (1967)

- Richardson : la longueur mesurée d'une côte dépend de l'unité. Plus le compas est petit (ε), plus il épouse de baies, plus la longueur est grande : $L(\varepsilon) \approx C\,\varepsilon^{1-D}$, avec $D \approx 1{,}25$ pour la côte ouest britannique.
- Mandelbrot y voit une dimension fractionnaire. Von Koch mesurée avec des segments de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^n$: $\left(\frac{4}{3}\right)^n = \varepsilon^{1-D}$ avec $D = \ln 4 / \ln 3$.
- Une côte est autosimilaire au sens statistique (remarque 3.2) ; sa dimension mesure son irrégularité.
- The Fractal Geometry of Nature (1982) : « Les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, les côtes ne sont pas des cercles, l'écorce n'est pas lisse, et l'éclair ne se propage pas en ligne droite. »
- L'ensemble de Mandelbrot ($z \mapsto z^2 + c$) ne provient pas d'un SIF : hors du cadre de ce chapitre.

Note historique 3.4 — Benoît Mandelbrot (1924–2010)



En 2010. Photo : Steve Jurvetson, CC BY 2.0, Wikimedia Commons.

- Né à Varsovie, famille juive d'origine lituanienne, émigrée en France en 1936 ; son oncle Szolem Mandelbrojt est professeur au Collège de France.
- Sous l'Occupation, la famille se cache ; scolarité interrompue. Faute de formation régulière, il développe une approche fondée sur la visualisation géométrique.
- Polytechnique (1944), aéronautique à Caltech, thèse à Paris (1952) sur la distribution statistique des mots.

Note historique 3.4 (suite)

- 1958 : choisit IBM, près de New York, plutôt qu'une université ; il y reste trente-cinq ans.
- Linguistique, économie, hydrologie, physique, astronomie : des déplacements entre disciplines qui suscitent la méfiance, mais lui font voir des structures communes.
- 1975 : forge le mot « fractal » (Les objets fractals : forme, hasard et dimension).
- Prix Wolf de physique (1993), prix du Japon (2003) ; professeur titulaire à Yale en 1999, à 75 ans. Mort en 2010.

Des monstres aux modèles

Les fractales et la finance

Le modèle classique, et ce que Mandelbrot observe

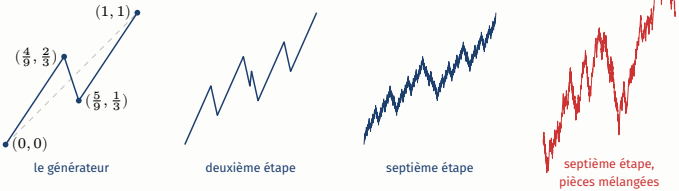
- Bachelier (1900, Théorie de la spéculation) : le cours d'une action comme une marche au hasard, variations indépendantes et normales — à la limite, le mouvement brownien. Fondement de la finance moderne (portefeuille, Black et Scholes, 1973).
- Mandelbrot (1963), prix du coton sur plusieurs décennies :
  1. les grandes variations sont beaucoup trop fréquentes (« queues épaisses », lois stables de Lévy) : l'effet Noé ;
  2. la forme des variations ne dépend pas de l'échelle de temps : le graphe est statistiquement auto-affine ; sans les axes, impossible de dire s'il couvre un jour, un mois ou un an.
- Plus tard : périodes agitées et calmes se regroupent, une forme de mémoire — l'effet Joseph.

Figure 3.16 — Une « caricature » de cours boursier

Tendance de $(0,0)$ à $(1,1)$; générateur $(0,0)$, $(\frac{4}{9},\frac{2}{3})$, $(\frac{5}{9},\frac{1}{3})$, $(1,1)$. C'est l'attracteur du SIF

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

avec $|\Delta y| = \sqrt{\Delta x}$ sur chaque morceau, comme le mouvement brownien.



Les conséquences

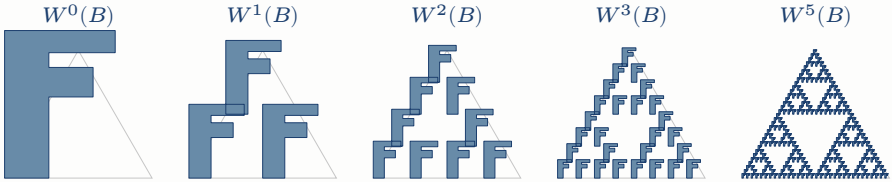
- En mélangeant au hasard l'ordre des trois morceaux à chaque remplacement, on obtient une courbe qui ressemble à un cours boursier. En déplaçant les points intérieurs du générateur : alternance de périodes calmes et agitées — le modèle multifractal (1997, avec Calvet et Fisher).
- Les modèles gaussiens sous-estiment le risque de catastrophe : le 19 octobre 1987, le Dow Jones perd près de $23\,\%$ en une séance, un événement presque impossible pour un modèle gaussien.
- The (Mis)behavior of Markets (2004, avec R. Hudson) : tenir compte des queues épaisses et de la mémoire des marchés.
- Accueil prudent (modèles plus difficiles ; Black et Scholes reste un outil de base), mais la crise de 2008 a ravivé l'intérêt, et les « queues épaisses » font partie du vocabulaire de la gestion des risques.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

- Von Koch : longueur infinie, aucune tangente. Sierpiński : aire nulle, longueur infinie.
- Autosimilarité : $E = w_1(E) \cup \cdots \cup w_N(E)$, avec des similitudes contractantes.
- Dimension de similitude $\ln N / \ln(1/r)$; équation de Moran $\sum r_i^d = 1$ sous la condition de l'ouvert.
- SIF et opérateur de Hutchinson W : une contraction de l'espace complet $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$; par Banach, un unique attracteur, limite de $W^n(B)$ pour toute figure B.
- Théorème du collage : trouver un SIF dont l'attracteur ressemble à une image donnée.
- Deux algorithmes : déterministe (coût exponentiel), jeu du chaos (coût linéaire, probabilités proportionnelles aux aires).
- Des monstres de Weierstrass aux modèles de Mandelbrot : côtes, nature, finance.

Figure 3.9, une dernière fois



Les trois chapitres réunis : des transformations affines (chapitre 1), une distance entre figures et le théorème de Banach (chapitre 2), une figure fractale comme point fixe (chapitre 3).

Et maintenant

- Les démonstrations laissées « au tableau » aujourd'hui sont dans les notes de cours ; celle du théorème 3.1 est à l'annexe C.
- Les exercices du chapitre (avec solutions complètes) couvrent chacun des résultats vus : à travailler avant le prochain cours.
- L'annexe Python des notes reprend les deux algorithmes de dessin.
- Prochain chapitre : les chaînes de Markov et PageRank — où le théorème de Banach réapparaît, dans un espace de dimension égale au nombre de pages du Web.