Chapitre 2

Espaces métriques

MAT-2901 — Mathématiques et technologie



Jérôme Soucy

Université Laval

Plan de l'exposé

1. Pourquoi parler de distance ?
2. Qu'est-ce qu'une distance ?
3. Deux métriques appliquées : la sphère et les bits
4. Ouverts, fermés et compacts
5. La distance de Hausdorff
6. Suites de Cauchy et complétude
7. La notion de point fixe
8. Contractions
9. Le théorème du point fixe de Banach
10. Une application : la méthode de Newton-Raphson
11. Synthèse

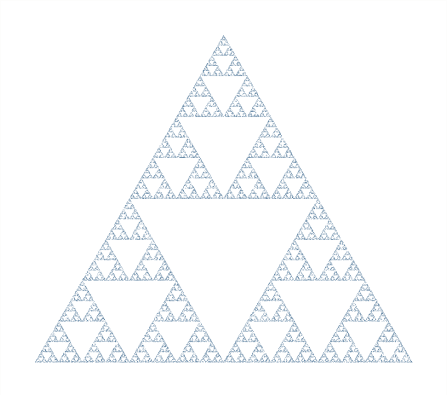
Pourquoi parler de distance ?

Une notion familière… sur des ensembles qui ne le sont pas

- La distance est rencontrée dès le primaire : entre deux points, deux villes sur une carte, deux nombres sur une droite graduée.
- Une même intuition : une petite distance, ce sont des objets proches ; et la distance ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les nomme.
- Mais que veut dire « distance » entre deux villes sur une sphère ? entre deux mots de même longueur ? entre deux figures géométriques ?

Stratégie du chapitre : dégager quelques propriétés de la distance euclidienne, et s'en servir comme définition sur un ensemble quelconque — ce qui donnera les espaces métriques. On y définira voisinage, convergence, continuité… et même une distance entre des ensembles.

Figure 2.1 — Le triangle de Sierpiński, par le jeu du chaos

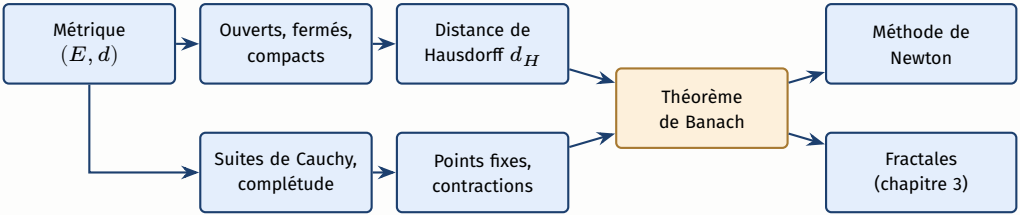


Partant d'un point, on choisit au hasard, à répétition, l'un des trois sommets d'un triangle, et on avance à mi-chemin vers lui.

Pourquoi obtient-on toujours la même figure ?

- Réponse au chapitre 3, grâce au théorème du point fixe de Banach — démontré aujourd'hui.
- La figure sera un point d'un espace dont les « points » sont des ensembles compacts du plan, muni de la distance de Hausdorff — construite aujourd'hui.

Le chemin de ce chapitre



Deux applications tout au long du chemin : la navigation sur une sphère et la détection d'erreurs dans une chaîne de bits.

Qu’est-ce qu’une distance ?

Ce que l'on sait déjà de la distance euclidienne

Si P, Q, R sont trois points du plan :

1. $d(P,Q)$ est toujours un nombre positif ou nul ;
2. $d(P,Q) = 0$ exactement quand P et Q sont le même point ;
3. $d(P,Q) = d(Q,P)$;
4. $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$: un détour par R n'est jamais plus court que le chemin direct.

> **Observation**
>
> Ces quatre propriétés ne font intervenir ni les coordonnées, ni le fait que P, Q, R soient des points du plan. On peut donc les reprendre telles quelles sur un ensemble quelconque.

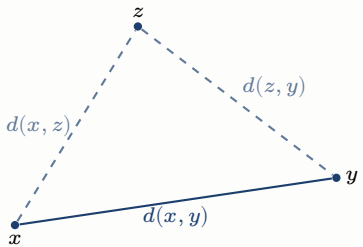
Définition 2.1 — Métrique, espace métrique

Soit E un ensemble. Une métrique (ou distance) sur E est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous $x, y, z \in E$:

(a)	$d(x,y) \geq 0$	(positivité)
(b)	$d(x,y) = 0 \iff x = y$	(séparation)
(c)	$d(x,y) = d(y,x)$	(symétrie)
(d)	$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$	(inégalité triangulaire)

Le couple (E, d) s'appelle alors un espace métrique.

Figure 2.2 — L'inégalité triangulaire



Le nom vient du cas $E = \mathbb{R}^2$: dans un triangle, chaque côté est au plus égal à la somme des deux autres. La propriété du secondaire devient un axiome, valable pour des ensembles beaucoup plus généraux.

Remarque 2.1 — La propriété de séparation

Remarque 2.1

La condition (b) réunit deux implications à distinguer :

- $d(x, x) = 0$ pour tout x : la distance d'un point à lui-même est nulle (intuitif) ;
- si $d(x, y) = 0$, alors $x = y$: seuls deux points confondus sont à distance nulle.

D'où le nom : une métrique sépare toujours deux points distincts par une distance strictement positive.

Cette condition devra être vérifiée avec attention pour la distance de Hausdorff (section 5).

Qu’est-ce qu’une distance ?

Les distances euclidienne et de Manhattan

Exemple 2.1 — La distance euclidienne dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$

Sur $\mathbb{R}$: $d_E(x,y) = |x-y|$. Positivité, séparation, symétrie : propriétés de la valeur absolue. Inégalité triangulaire : $|a+b| \leq |a| + |b|$ avec $a = x - z$, $b = z - y$.

Sur $\mathbb{R}^n$, pour $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$d_E(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,,$$

la distance euclidienne. Pour $n = 2$: le théorème de Pythagore appliqué à la différence des coordonnées.

Convention : sauf mention contraire, c'est la métrique utilisée sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.2 — La taxi-distance

Pour $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$d_T(X, Y) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Une autre métrique sur $\mathbb{R}^2$ (inégalité triangulaire : coordonnée par coordonnée). C'est la taxi-distance, ou distance de Manhattan : un taxi sur un quadrillage de rues perpendiculaires, sans trajet diagonal.

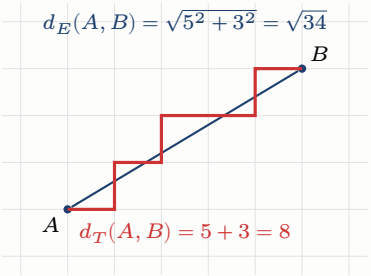


Figure 2.3 — Tout chemin en escalier a la même longueur.

Remarque 2.2 — Même paire de points, deux distances

Remarque 2.2

d_E et d_T sont deux métriques distinctes sur le même ensemble $\mathbb{R}^2$: sur la figure 2.3, $\sqrt{34} \approx 5{,}83$ contre 8.

Un même ensemble, deux métriques : deux espaces métriques différents, $(\mathbb{R}^2, d_E)$ et $(\mathbb{R}^2, d_T)$, bien qu'ils aient les mêmes éléments.

À retenir pour la section 4 : la forme d'une boule dépend de la métrique, pas seulement de l'ensemble.

Deux métriques appliquées : la sphère et les bits

Deux métriques appliquées : la sphère et les bits

La distance sur la sphère

La distance sphérique

- Le segment Montréal–Paris passe à l'intérieur de la Terre : un avion ne peut pas le suivre.
- On mesure plutôt le long de l'arc de grand cercle : l'intersection de la sphère avec le plan passant par u, v et le centre O.
- Cette longueur d'arc est la distance sphérique (ou du grand cercle) : le plus court chemin le long de la surface.

Navigation aérienne, GPS : c'est pourquoi les vols vers l'Europe semblent « courber vers le nord » sur une carte plane.

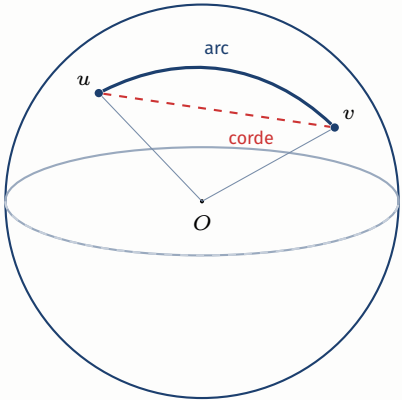


Figure 2.4

Deux métriques appliquées : la sphère et les bits

Mesurer les erreurs

Définition 2.2 — Distance de Hamming

Un message binaire transmis peut voir certains bits inversés par le bruit (canal informatique, disque, satellite). Pour détecter — voire corriger — ces erreurs, il faut d'abord mesurer l'écart entre deux messages.

Définition 2.2 — Distance de Hamming

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\{0,1\}^n$,

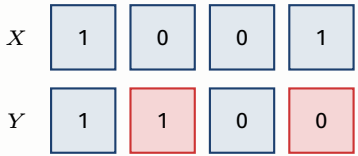
$$d_{\mathrm{Ham}}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Comme $|x_i - y_i| \in \{0,1\}$, $d_{\mathrm{Ham}}(X,Y)$ est le nombre de positions où X et Y diffèrent : le nombre minimal de bits à inverser pour passer de X à Y.

Exemple 2.3 — Un calcul de distance de Hamming

$X = (1,0,0,1)$ et $Y = (1,1,0,0)$ dans $\{0,1\}^4$:

$$d_{\mathrm{Ham}}(X,Y) = |1-1| + |0-1| + |0-0| + |1-0| = 0+1+0+1 = 2.$$



Les suites diffèrent exactement aux positions 2 et 4.

d_{Ham} est bien une métrique

- Somme de valeurs absolues : positive ou nulle ; nulle exactement quand chaque terme l'est, i.e. $X = Y$.
- $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$: symétrie.

VÉRIFICATION AU TABLEAU

Inégalité triangulaire, position par position : si X et Y diffèrent en i mais pas X et Z, alors Z et Y y diffèrent forcément. Chaque position comptée à gauche dans $d_{\text{Ham}}(X, Y) \leq d_{\text{Ham}}(X, Z) + d_{\text{Ham}}(Z, Y)$ l'est au moins une fois à droite.

Note historique 2.1 — Richard Hamming et la détection d'erreurs

- 1950, laboratoires Bell : Richard Hamming (1915–1998) travaille sur la fiabilité des premiers ordinateurs à relais.
- Les arrêts de la machine les fins de semaine l'irritent : elle détecte une erreur de lecture, mais ne sait pas la corriger.
- Son idée — les codes de Hamming : choisir les messages valides tous à distance de Hamming au moins 3 les uns des autres.
- Un message corrompu par une erreur reste alors strictement plus proche (au sens de d_{Ham}) du message original que de tout autre message valide : on le corrige automatiquement.

Même idée aujourd'hui, sous une forme ou une autre, dans les CD, les disques durs, les communications par satellite.

Ouverts, fermés et compacts

Pourquoi ce détour ?

Avant de définir une distance entre deux ensembles, il faut le vocabulaire des ensembles ouverts, fermés et compacts.

- Tout repose sur une seule notion : la boule ouverte.
- Tout s'exprime dans le langage des espaces métriques.
- On illustre surtout dans $\mathbb{R}^n$, où l'interprétation géométrique est la plus parlante.

Ouverts, fermés et compacts

Boules et ensembles ouverts

Définition 2.3 — Boule ouverte

Définition 2.3 — Boule ouverte

Soit (E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $r > 0$. La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r est

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) < r\}.$$

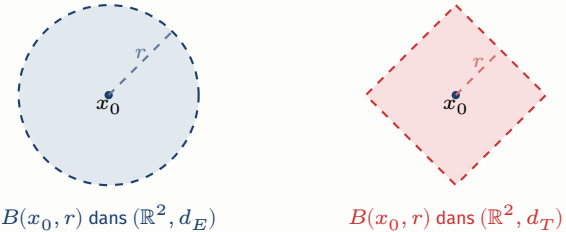


Figure 2.5 — Même ensemble, même centre : un disque pour d_E, un carré tourné de $45°$ pour d_T ($|x - x_0| + |y - y_0| < r$).

Outil 2.1 — Tracer des boules dans Desmos

Outil — Tracer des boules dans Desmos

Desmos trace directement les régions définies par des inégalités :

`x^2 + y^2 < r^2` et `|x| + |y| < r`,

avec un curseur pour r : on obtient les deux boules de la figure 2.5. Le bord est tracé en pointillé — il n'appartient pas à la boule ouverte. Avec <=, le bord devient plein : boule ouverte vs boule fermée, visuellement.

En 4^{e} secondaire : comparer « à vol d'oiseau » et « en taxi » à partir d'un point donné.

Définition 2.4 — Ensemble ouvert

Définition 2.4 — Ensemble ouvert

Soit (E, d) un espace métrique et $U \subseteq E$. U est un ensemble ouvert si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$.

Chaque point de U est le centre d'une boule entièrement contenue dans U : aucun point de U n'est sur sa frontière. Le rayon peut dépendre du point — plus petit près du bord, mais toujours strictement positif.

Figures 2.6 et 2.7 — Ouvert, et pas ouvert

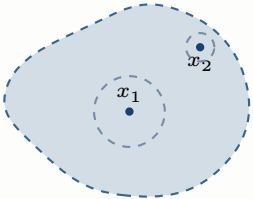


Figure 2.6. Un ouvert (frontière en pointillé, exclue). Près du bord, x_2 demande un rayon plus petit que x_1 — mais il en existe un.

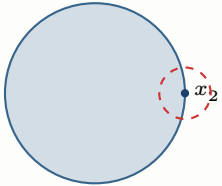


Figure 2.7. Le disque plein, bord compris, n'est pas ouvert : toute boule centrée en x_2, même minuscule, déborde du disque.

Ouverts, fermés et compacts

Ensembles fermés

Définition 2.5 — Ensemble fermé

Soit (E, d) un espace métrique et $F \subseteq E$. F est un ensemble fermé si son complément F^c est ouvert dans (E, d).

Remarque 2.3 — Ni l'un ni l'autre, ou les deux

« Ouvert » et « fermé » ne s'excluent pas :

- un ensemble peut n'être ni l'un ni l'autre (un disque qui contient une partie, mais pas la totalité, de sa frontière);
- E et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés dans (E, d).

Ouverts, fermés et compacts

Ensembles compacts

Définition 2.6 et théorème 2.1 — Borné, compact

Définition 2.6 — Ensemble borné

Soit (E, d) un espace métrique et $F \subseteq E$. F est borné s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $d(x, y) \leq c$ pour tous $x, y \in F$.

Théorème 2.1 — Heine-Borel

Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$, muni de d_E. K est compact si et seulement s'il est à la fois fermé et borné.

(Admis.) Convention du chapitre : dans $\mathbb{R}^n$, on utilise « fermé et borné » comme définition d'un compact.

Remarque 2.4 — La compacité dans un espace général

Remarque 2.4

« Fermé et borné » n'est pas, à proprement parler, la définition d'un compact : c'en est une caractérisation, valable dans $\mathbb{R}^n$, qui cesse d'être vraie dans des espaces métriques plus généraux.

La véritable définition : de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un nombre fini d'ouverts qui recouvrent encore K.

Pour nos besoins — dans $\mathbb{R}^n$ — « fermé et borné » suffira.

La distance de Hausdorff

Une distance entre des ensembles

Notons $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts non vides d'un espace métrique (E, d).

L'idée à formaliser : deux ensembles sont proches lorsque chaque point de l'un est près d'un point de l'autre, et réciproquement.

Outil : le voisinage d'un ensemble, obtenu en l'« épaississant ».

Objectif lointain : au chapitre 3, une figure fractale sera un point de l'espace métrique $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$.

La distance de Hausdorff

Le epsilon-voisinage et la somme de Minkowski

Définitions 2.7 et 2.8 — Minkowski, ε-voisinage

Définition 2.7 — Somme de Minkowski

Soit $(E, d) = (\mathbb{R}^n, d_E)$ et $A, B \subseteq E$. La somme de Minkowski de A et B est $A \oplus B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

Une copie de B placée en chaque point de A, puis on réunit tout. Si B est une petite boule fermée centrée à l'origine : on ajoute autour de A une bande de même épaisseur dans toutes les directions.

Définition 2.8 — ε-voisinage d'un ensemble

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vide et $\varepsilon > 0$. Le ε-voisinage de A est $A^{\oplus\varepsilon} = A \oplus \overline{B(0, \varepsilon)}$, où $\overline{B(0, \varepsilon)} = \{x : d_E(x, 0) \leq \varepsilon\}$ est la boule fermée.

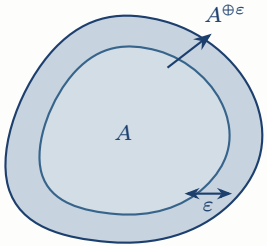
Figure 2.8 — Le ε-voisinage

Reformulation :

$$A^{\oplus\varepsilon} = \{x \in E : d_E(x, a) \leq \varepsilon \text{ pour un certain } a \in A\},$$

les points à distance au plus ε d'au moins un point de A.

En particulier $A \subseteq A^{\oplus\varepsilon}$: chaque point de A est à distance $0 \leq \varepsilon$ de lui-même.



(Dessin simplifié : une homothétie plutôt que la vraie somme de Minkowski.)

Remarque 2.5 — Le voisinage dépend aussi de la métrique

Remarque 2.5

Comme les boules (figure 2.5), le ε-voisinage change d'aspect avec la métrique. Pour le singleton $A = \{(0,0)\}$:

- avec une boule fermée de $(\mathbb{R}^2, d_E)$: un disque plein de rayon ε ;
- avec une boule fermée de $(\mathbb{R}^2, d_T)$: un carré plein tourné de $45°$, de « demi-diagonale » ε.

La distance de Hausdorff

Définition de la distance de Hausdorff

Définition 2.9 — Distance de Hausdorff

Définition 2.9 — Distance de Hausdorff

Soit $(E, d) = (\mathbb{R}^n, d_E)$ et $A, B \in \mathcal{K}(E)$. La distance de Hausdorff entre A et B est

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B^{\oplus\varepsilon} \text{ et } B \subseteq A^{\oplus\varepsilon}\}.$$

Le plus petit rayon d'épaississement tel que chacun des deux ensembles soit recouvert par le ε-voisinage de l'autre.

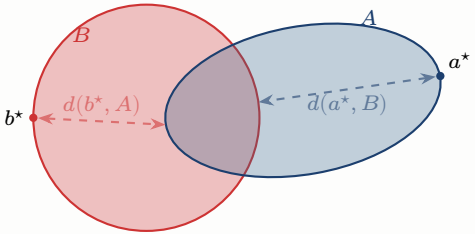
- A, B compacts donc bornés : un tel ε existe toujours (assez grand).
- On peut montrer que l'infimum est en fait atteint.

Figure 2.9 — La formule de calcul

Avec $d(x, C) = \inf_{c \in C} d(x, c)$:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B),\ \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}. \tag{2.1}$$

Recette : trouver le point de A le plus loin de B ; puis le point de B le plus loin de A ; garder la plus grande des deux distances.



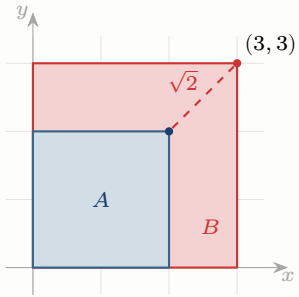
Exemple 2.4 — Deux carrés emboîtés

$A = [0,2] \times [0,2]$, $B = [0,3] \times [0,3]$.

- $A \subseteq B$: tout point de A est à distance 0 de B, donc $\sup_{a \in A} d(a,B) = 0$.
- Le point de B le plus loin de A : le coin $(3,3)$, à distance $d_E((3,3),(2,2)) = \sqrt{2}$.

$$d_H(A,B) = \max\{0, \sqrt{2}\} = \sqrt{2}.$$

La formule (2.1) n'est pas symétrique terme à terme : c'est le $\max$ qui rend d_H symétrique.



Remarque 2.6 — Pourquoi des ensembles compacts ?

Remarque 2.6

La restriction aux compacts sert à garantir la séparation (axiome (b)).

Contre-exemple sans compacité : dans $(\mathbb{R}, d_E)$, $A =]0,1[$ et $B = [0,1]$ sont distincts, et pourtant $d_H(A,B) = 0$: tout point de B est aussi près qu'on veut d'un point de A. Le coupable : A n'est pas fermé, il lui « manque » ses points frontières.

Sur $\mathcal{K}(E)$, on démontre que $d_H(A,B) = 0 \Rightarrow A = B$; on vérifie aussi symétrie et inégalité triangulaire.

$(\mathcal{K}(E), d_H)$ est un espace métrique dont les « points » sont des ensembles.

Pour la classe 2.1 — Comparer deux figures géométriques

Pour la classe — Comparer deux figures géométriques

« À quel point ce triangle ressemble-t-il à celui-là ? » La distance de Hausdorff rend la question précise :

- deux polygones de forme presque identique, dont un sommet a légèrement bougé : petite distance de Hausdorff ;
- des figures plus différentes : distance plus grande.

C'est le principe de certains logiciels de reconnaissance de formes : un contour détecté dans une image ressemble-t-il suffisamment à un contour de référence ?

Note historique 2.2 — Felix Hausdorff (1868–1942)



Felix Hausdorff (1868–1942). Domaine public, Wikimedia Commons.

- Mathématicien allemand, professeur à Leipzig, Bonn et Greifswald.
- Grundzüge der Mengenlehre (1914) : les bases de la topologie générale telle qu'on l'enseigne encore ; c'est là qu'apparaît la distance qui porte son nom.
- Aussi poète, essayiste (sur Nietzsche) et dramaturge, sous le pseudonyme Paul Mongré.

Note historique 2.2 (suite)

- À partir de 1933, persécuté par le régime nazi en raison de ses origines juives ; mis à la retraite forcée en 1935 « sans un mot de remerciement ».
- Après la Nuit de Cristal (1938), ses conditions se détériorent encore ; une tentative d'émigration vers les États-Unis échoue en 1939.
- En janvier 1942, recevant l'ordre de se présenter à un camp d'internement, il se donne la mort avec son épouse Charlotte et la sœur de celle-ci. Il avait 73 ans.

Une partie de son œuvre, dont la dimension de Hausdorff — outil essentiel de la géométrie des fractales (chapitre 3) — n'a été pleinement reconnue qu'après sa mort.

Suites de Cauchy et complétude

Pourquoi la complétude ?

Le théorème de Banach construit une solution comme limite d'une suite. Encore faut-il que cette limite appartienne à l'espace dans lequel on travaille.

C'est exactement ce qu'exprime la complétude. Pour la définir, il faut distinguer :

- les suites convergentes (on compare les termes à une limite connue) ;
- les suites de Cauchy (on compare les termes entre eux, sans connaître de limite).

Définition 2.10 — Suite convergente

Définition 2.10 — Suite convergente

Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de E. (x_n) converge dans (E, d) s'il existe $\overline{x} \in E$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ avec

$$d(x_n, \overline{x}) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n > N.$$

$\overline{x}$ est la limite de (x_n) : $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Remarquer : $\overline{x} \in E$ fait partie de la définition.

Exemple 2.5 — Une suite convergente dans le plan

$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 1$: les termes alternent de part et d'autre de l'axe des x.

- Pour $\varepsilon = 0{,}3$: $d_E(x_n, (0,0)) < 0{,}3$ dès que $n \geq 5$; $N = 4$ convient.
- En général, $d_E(x_n, (0,0)) = \sqrt{2}/n \to 0$.

Donc (x_n) converge vers $\overline{x} = (0,0)$.

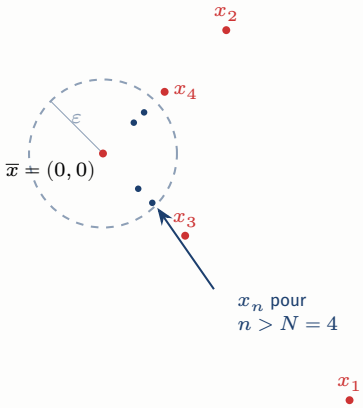


Figure 2.10

Exemple 2.6 — Une suite divergente dans le plan

$x_n = ((-1)^n, 0)$: alternativement $(-1, 0)$ et $(1, 0)$, indéfiniment.

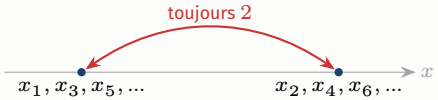


Figure 2.11

Elle ne converge vers aucun point de $\mathbb{R}^2$: il faudrait que $d_E(x_n, \overline{x})$ devienne aussi petit qu'on veut, impossible tant que x_n oscille entre deux points à distance 2.

Définition 2.11 — Suite de Cauchy

Définition 2.11 — Suite de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de E. (x_n) est une suite de Cauchy dans (E, d) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{pour tous } m, n > N.$$

	on compare...	limite à connaître ?
convergente	les termes à $\overline{x}$	oui
de Cauchy	les termes entre eux	non

Remarque 2.7 — Les deux exemples et la condition de Cauchy

Remarque 2.7

Exemple 2.5 : de Cauchy. Sur la figure 2.10, pour $m, n > N = 4$, x_m et x_n sont dans le disque de rayon $\varepsilon = 0{,}3$, donc à distance au plus $2\varepsilon = 0{,}6$: le même N fonctionne, quitte à doubler ε.

Exemple 2.6 : pas de Cauchy. Quel que soit N, il existe $m, n > N$ (un pair, un impair) avec $d(x_m, x_n) = 2$: aucun $\varepsilon < 2$ ne convient.

Proposition 2.2 — Convergente ⇒ Cauchy

Proposition 2.2

Soit (x_n) une suite convergente dans un espace métrique (E, d). Alors (x_n) est une suite de Cauchy dans (E, d).

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Idée : choisir N pour $\varepsilon/2$ dans la définition de convergence, puis inégalité triangulaire : $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, \overline{x}) + d(\overline{x}, x_n) < \varepsilon$.

La réciproque est fausse en général — c'est précisément ce qui motive la définition suivante.

Définition 2.12 — Espace métrique complet

Définition 2.12 — Espace métrique complet

Un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (E, d) converge vers un élément de E.

Dans un espace complet, pour montrer qu'une suite converge, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy — sans avoir à deviner la limite. C'est exactement la stratégie de la preuve du théorème de Banach.

Exemple 2.7 — Les rationnels ne forment pas un espace complet

Dans $(\mathbb{Q}, d_E)$, la suite des troncatures décimales de $\sqrt{2}$:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1{,}4, \quad x_2 = 1{,}41, \quad x_3 = 1{,}414, \quad x_4 = 1{,}414\,2, \quad \ldots$$

- Chaque $x_n \in \mathbb{Q}$, et $0 \leq \sqrt{2} - x_n < 10^{-n}$: (x_n) converge vers $\sqrt{2}$ dans $(\mathbb{R}, d_E)$.
- Donc (x_n) est de Cauchy (proposition 2.2).
- Mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: dans $(\mathbb{Q}, d_E)$, la suite est de Cauchy sans converger.

$(\mathbb{Q}, d_E)$ n'est pas complet.

Remarque 2.8 — La complétude des réels

Remarque 2.8

$\mathbb{R}$ « complète » $\mathbb{Q}$ en ajoutant tous les nombres — $\sqrt{2}$, π, … — qui sont limites de suites de rationnels sans être rationnels.

Fait admis

Pour tout n, $(\mathbb{R}^n, d_E)$ est un espace métrique complet.

C'est ce qui permettra d'appliquer le théorème de Banach dans $\mathbb{R}^2$ (section 9).

La notion de point fixe

Définition 2.13 — Point fixe

Définition 2.13 — Point fixe

Soit E un ensemble et $f : E \to E$. Un élément $x \in E$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

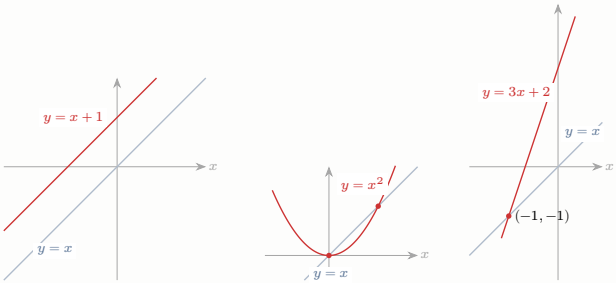
Un point que la fonction envoie sur lui-même. Pour $E = \mathbb{R}$: les intersections du graphe de f avec la droite $y = x$.

Deux questions :

1. Une fonction donnée possède-t-elle un point fixe ?
2. Si oui, est-il unique ?

Les réponses dépendent de la fonction.

Exemple 2.8 — Trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



(i) aucun point fixe (ii) deux points fixes (iii) un point fixe

Figure 2.12

(i) $x + 1 = x$: aucune solution. (ii) $x^2 = x : x = 0$ et $x = 1$. (iii) $3x + 2 = x : x = -1$ seulement — mais en itérant f depuis $x_0 \neq -1$, la suite s'éloigne de -1. Avoir un point fixe ne garantit pas que l'itération y mène (on y revient en section 8).

Outil 2.2 — Points fixes et itérations dans Desmos et GeoGebra

Outil — Points fixes et itérations dans Desmos et GeoGebra

Desmos : tracer $y = ax+b$ avec deux curseurs, et la droite $y = x$. Le point fixe se lit à l'intersection ; les élèves peuvent conjecturer qu'il vaut $b/(1-a)$, et voir qu'il disparaît quand $a = 1$ (cas (i)).

GeoGebra : `IterationList(f, x0, 20)` produit $x_0, x_1, \dots, x_{20}$. Comparer $f(x) = 3x + 2$ et $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$: la suite s'éloigne du point fixe dans le premier cas, s'en approche dans le second.

Cela prépare la notion de contraction.

Exemple 2.9 — Une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}4 & -0{,}35\\ 0{,}35 & 0{,}4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Forme $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$: une similitude directe (chapitre 1) de rapport $k = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}35^2} \approx 0{,}531$.

Son unique point fixe est l'origine. Les images successives d'un motif « F » sont tournées et réduites d'un facteur k, et s'enroulent en spirale vers ce point fixe.

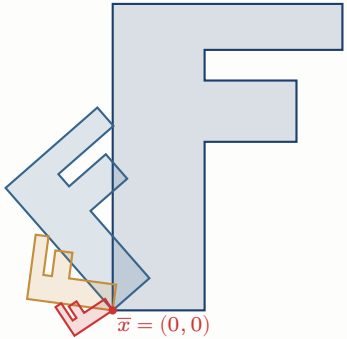


Figure 2.13

Remarque 2.9 — Un autre résultat : le théorème de Brouwer

Remarque 2.9

Brouwer : toute fonction continue d'un disque fermé de $\mathbb{R}^2$ (plus généralement, d'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$) dans lui-même possède au moins un point fixe — sans hypothèse de contraction.

Mais il ne garantit

- ni l'unicité (pensons à $f = \mathrm{id}$),
- ni une façon de calculer le point fixe.

Le théorème de Banach demande davantage, et donne davantage : existence, unicité, un algorithme, et une estimation de la vitesse de convergence.

Contractions

Définition 2.14 — Contraction

Les exemples précédents invitent à regarder les fonctions qui rapprochent les points.

Définition 2.14 — Contraction

Soit (E, d) un espace métrique et $f : E \to E$. f est une contraction sur E s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in E.$$

La constante k est le rapport de contraction de f.

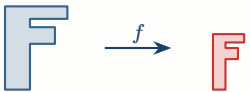
Chaque application de f multiplie les distances par au plus $k < 1$.

Exemple 2.10 — Contractions du plan

- Une homothétie de rapport k, $|k| < 1$: contraction de rapport $|k|$ sur $(\mathbb{R}^2, d_E)$.
- Plus généralement, toute similitude de rapport $k < 1$ (comme celle de l'exemple 2.9).
- Mais une contraction n'est pas forcément une similitude :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est une contraction de rapport $2/3$ (elle réduit davantage selon x que selon y), sans préserver les angles.



Remarque 2.10 — Le rôle de la borne stricte $k < 1$

Remarque 2.10

La condition $k < 1$, et non $k \leq 1$, est essentielle.

- $f(x) = x + 1$ sur $(\mathbb{R}, d_E)$: $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Elle conserve les distances ($k = 1$)... et n'a aucun point fixe (exemple 2.8 (i)).
- $f(x) = 3x + 2$: $d(f(x), f(y)) = 3\, d(x, y)$. Non seulement $k = 3 \geq 1$, mais f éloigne les points d'un facteur 3.

C'est ce qui explique que l'itération de l'exemple 2.8 (iii) s'éloigne de son unique point fixe $x = -1$ au lieu d'y converger.

Le théorème du point fixe de Banach

Théorème 2.3 — Théorème du point fixe de Banach

Complétude et contraction : tous les ingrédients sont en place. On énonce et démontre d'abord le théorème dans $(\mathbb{R}^2, d_E)$, pour pouvoir dessiner chaque étape.

Théorème 2.3 — Théorème du point fixe de Banach

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une contraction de rapport k (pour d_E). Alors :

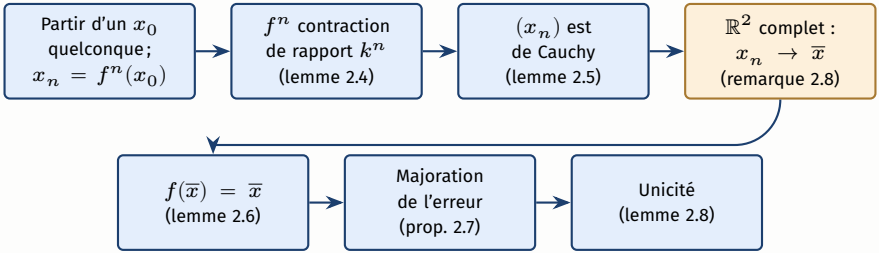
(i) f possède un unique point fixe $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$;

(ii) pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$, la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers $\overline{x}$, quel que soit x_0 ;

(iii) on a la majoration $d_E(x_n, \overline{x}) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d_E(x_0, x_1)$.

($f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$, n fois : une composée, pas un produit.)

Le plan de la démonstration



Seul ingrédient propre à $\mathbb{R}^2$: sa complétude. Tout le reste n'utilise que les axiomes d'une métrique.

Lemme 2.4 — Une contraction itérée reste une contraction

Lemme 2.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une contraction de rapport k. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, f^n est une contraction de rapport k^n :

$$d_E(f^n(x), f^n(y)) \leq k^n \, d_E(x, y).$$

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Récurrence sur n : appliquer la contraction aux points $f^n(x)$, $f^n(y)$, puis l'hypothèse de récurrence.

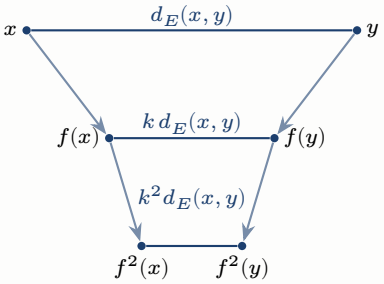


Figure 2.14

Lemme 2.5 — La suite des itérées est de Cauchy

Lemme 2.5

Soit f une contraction de rapport k, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $x_n = f^n(x_0)$. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

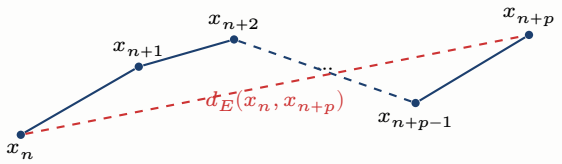
$$d_E(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n(1-k^p)}{1-k}\, d_E(x_0, x_1), \tag{2.2}$$

et par conséquent (x_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{R}^2, d_E)$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Lemme 2.4 : $d_E(x_i, x_{i+1}) \leq k^i d_E(x_0, x_1)$. Inégalité triangulaire p fois le long de la ligne brisée (figure 2.15), puis somme géométrique. Comme $1 - k^p \leq 1$ et $k^n \to 0$, la borne tend vers 0 uniformément en p.

Figure 2.15 — La ligne brisée



$$d_E(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d_E(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leq d_E(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i}.$$

La diagonale (en rouge) d'un polygone, même croisé, n'excède jamais son périmètre.

Lemme 2.6 — La limite est un point fixe

$(\mathbb{R}^2, d_E)$ est complet et (x_n) est de Cauchy : il existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ avec $x_n \to \overline{x}$.

Lemme 2.6

Avec les notations précédentes, $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Une contraction est continue ; elle commute donc avec la limite : $f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = \overline{x}$.

Proposition 2.7 — Majoration de l'erreur

Proposition 2.7 — Majoration de l'erreur

Avec les notations précédentes,

$$d_E(x_n, \overline{x}) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d_E(x_0, x_1) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Faire $p \to \infty$ dans (2.2) ; continuité de $d_E(x_n, \cdot)$ et $k^p \to 0$.

Usage pratique : on sait à l'avance combien d'itérations suffisent pour une précision voulue, à partir du seul premier pas $d_E(x_0, x_1)$.

Lemme 2.8 — Unicité du point fixe

Lemme 2.8 — Unicité du point fixe

Une contraction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ possède au plus un point fixe.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

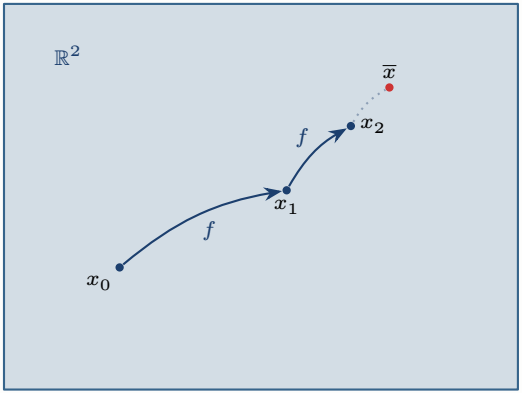
Par l'absurde : deux points fixes distincts donnent $d_E(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \leq k\, d_E(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$; on divise (séparation !) et on obtient $1 \leq k$.

Lemmes 2.4, 2.5, 2.6, 2.8 et proposition 2.7 réunis : toutes les affirmations du théorème 2.3 sont établies.

Figure 2.16 — Interprétation géométrique

À chaque application de f, la distance au point fixe est multipliée par un facteur $k < 1$.

La majoration montre que $x_n \to \overline{x}$ quel que soit x_0 — et toujours vers le même point fixe, peu importe où on commence à itérer.



Remarque 2.11 — Le cas d'un espace métrique quelconque

Remarque 2.11

Aucun argument des lemmes 2.4, 2.5, 2.6, 2.8 ni de la proposition 2.7 n'utilise une propriété particulière du plan : seulement les quatre axiomes d'une métrique et la complétude.

Théorème de Banach — forme générale

Si (E, d) est un espace métrique complet et $f : E \to E$ une contraction, alors f possède un unique point fixe $\overline{x}$, vers lequel converge $(f^n(x_0))$ pour tout $x_0 \in E$, avec la même majoration de l'erreur.

Deux usages à venir : un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ (méthode de Newton, tout de suite); l'espace $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$ (fractales, chapitre 3).

Une application : la méthode de Newton-Raphson

Un zéro, vu comme un point fixe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, et $x^\star$ un zéro de f avec $f'(x^\star) \neq 0$. Plutôt que de résoudre $f(x) = 0$, on pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (\text{là où } f'(x) \neq 0).$$

Puisque $f(x^\star) = 0$: $g(x^\star) = x^\star$.

Un zéro de f est un point fixe de g.

La méthode consiste à itérer g : $x_{n+1} = g(x_n)$.

Proposition 2.9 — g est localement une contraction

Proposition 2.9

Avec les notations précédentes, $g'(x^\star) = 0$. Par conséquent, pour tout $k \in]0,1[$, il existe $\delta > 0$ tel que g soit une contraction de rapport k sur l'intervalle fermé $I = [x^\star - \delta,\ x^\star + \delta]$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Calcul : $g'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$, nul en $x^\star$. Par continuité, $|g'| \leq k$ près de $x^\star$ (réduire δ pour avoir aussi $g(I) \subseteq I$) ; puis théorème des accroissements finis.

Remarque 2.12 — Complétude de l'intervalle

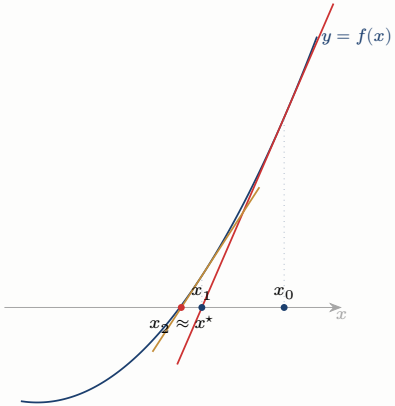
$I \subset \mathbb{R}$, pas $\mathbb{R}^2$: on utilise la forme générale (remarque 2.11). Fait admis : un sous-ensemble fermé d'un espace complet est complet. I est fermé dans $\mathbb{R}$, complet : Banach s'applique.

Figure 2.17 — Interprétation géométrique

$f(x) = (x-2)^2 - 3$, $x_0 = 5$.

- Tangente en $(x_0, f(x_0))$ jusqu'à l'axe des x : $x_1 = 4$.
- On recommence : $x_2 = 3{,}75$.
- À comparer : $x^\star = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732$.

Banach garantit la convergence pour tout $x_0 \in I$.



Convergence quadratique

Banach seul garantit une convergence géométrique : l'erreur est multipliée par au plus k à chaque étape.

Mais ici $g'(x^\star) = 0$ exactement (et pas seulement $|g'(x^\star)| \leq k$). Un développement de Taylor plus fin montre que la convergence est quadratique :

le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque itération,

une fois assez près de $x^\star$.

Exemple 2.11 — Deux méthodes, une même équation

Équation $\cos(x) = x$, solution $x^\star \approx 0{,}739\,085\,133\,2$.

- Méthode simple $x_{n+1} = \cos(x_n)$, depuis $x_0 = 0$: converge (contraction de rapport $\sin(1) \approx 0{,}841$), mais il faut 21 itérations pour 4 décimales et 45 pour 8.
- Newton sur $f(x) = \cos(x) - x$: $g(x) = x + \dfrac{\cos(x) - x}{\sin(x) + 1}$, depuis $x_0 = 1$.

n	x_n	erreur $\lvert x_n - x^\star \rvert$
0	$1{,}000\,000\,000$	$2{,}6 \times 10^{-1}$
1	$0{,}750\,363\,868$	$1{,}1 \times 10^{-2}$
2	$0{,}739\,112\,891$	$2{,}8 \times 10^{-5}$
3	$0{,}739\,085\,133$	$1{,}9 \times 10^{-10}$

Trois itérations de Newton battent les 45 de la méthode simple : 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; … décimales exactes.

Exemple 2.12 — Une boîte à coût minimal (1/2)

Boîte sans couvercle, base carrée de côté x, volume $V = 800$ cm^3, donc hauteur $h = 800/x^2$.

- base : $0{,}05$ \$/cm^2 ; parois : $0{,}02$ \$/cm^2 ;
- bordure de renfort sur le pourtour de l'ouverture (périmètre $4x$) : $0{,}08$ \$/cm.

$$C(x) = \underbrace{0{,}05\,x^2}_{\text{base}} + \underbrace{0{,}02 \cdot 4xh}_{\text{parois}} + \underbrace{0{,}08 \cdot 4x}_{\text{bordure}} = 0{,}05\,x^2 + \frac{64}{x} + 0{,}32\,x.$$

Minimiser : résoudre $f(x) := C'(x) = 0{,}10\,x - \dfrac{64}{x^2} + 0{,}32 = 0$, soit la cubique $0{,}10\,x^3 + 0{,}32\,x^2 - 64 = 0$ — aucune racine évidente.

Exemple 2.12 — Une boîte à coût minimal (2/2)

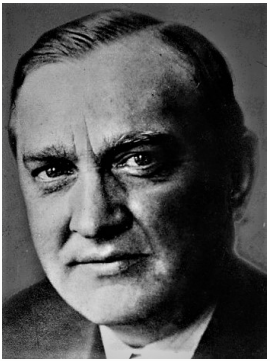
Newton sur f, avec $f'(x) = 0{,}10 + 128/x^3$, depuis $x_0 = 8$ (une boîte presque cubique) :

n	x_n (cm)	$f(x_n)$
0	$8{,}000\,000$	$0{,}120\,0$
1	$7{,}657\,143$	$-5{,}84 \times 10^{-3}$
2	$7{,}672\,315$	$-1{,}28 \times 10^{-5}$
3	$7{,}672\,348$	$-6{,}20 \times 10^{-11}$

Côté de base $x^\star \approx 7{,}672$ cm, hauteur $h^\star = 800/(x^\star)^2 \approx 13{,}59$ cm, coût total $\approx 13{,}74$ \$.

Trois itérations suffisent largement pour fabriquer une boîte.

Note historique 2.3 — Stefan Banach (1892–1945)



Stefan Banach (1892–1945). Domaine public, Wikimedia Commons.

- Né à Cracovie, confié à des familles d'accueil ; apprend une grande partie des mathématiques par lui-même.
- 1916 : Hugo Steinhaus surprend, dans un parc, une conversation de Banach sur l'intégrale de Lebesgue. Il lui propose des problèmes ouverts ; Banach les résout en une semaine. « Ma plus grande découverte scientifique a été de découvrir Banach. »
- Thèse (1920, publiée en 1922) : définit les espaces de Banach et fonde l'analyse fonctionnelle moderne — le théorème du point fixe y apparaît.

Note historique 2.3 (suite)

- Professeur à Lwów (aujourd'hui Lviv, Ukraine), il y fonde avec ses collègues l'école mathématique de Lwów.
- On se réunit au Café Écossais ; les problèmes ouverts sont consignés dans un cahier resté célèbre : le Livre écossais.
- Sous l'occupation allemande, il échappe à la déportation en travaillant comme « nourricier de poux » dans un institut de recherche sur le typhus — emploi qui protégeait alors de nombreux universitaires.
- Il meurt d'un cancer du poumon en 1945, peu après la fin de la guerre, à 53 ans.

Note historique 2.4 — Origines et applications du théorème

- Picard (1890) utilise déjà les approximations successives pour l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations différentielles (théorème de Picard-Lindelöf).
- Banach (1922) : le cadre abstrait. En isolant la complétude et le caractère contractant, un seul résultat couvre de nombreux problèmes.
- Caccioppoli (1930) le redécouvre indépendamment : théorème de Banach-Caccioppoli.

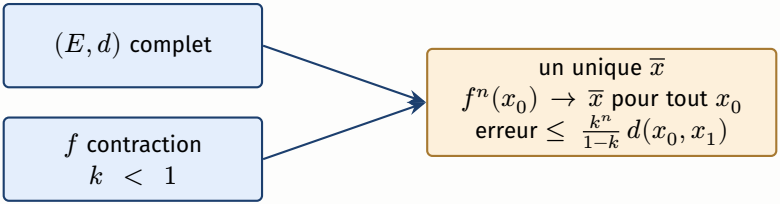
Applications : construction des fractales (chapitre 3) ; Newton et autres méthodes numériques ; PageRank, qui a classé les pages web chez Google à ses débuts — le point fixe d'une contraction dans un espace de dimension égale au nombre de pages du Web (chapitre 4).

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

- Une métrique : quatre axiomes (positivité, séparation, symétrie, inégalité triangulaire) — sur n'importe quel ensemble.
- Un même ensemble peut porter plusieurs métriques (d_E, d_T) ; la forme des boules en dépend.
- Des métriques « appliquées » : distance sphérique (navigation), distance de Hamming (codes correcteurs).
- Ouvert, fermé, compact ; dans $\mathbb{R}^n$, compact = fermé et borné (Heine-Borel).
- La distance de Hausdorff fait de $\mathcal{K}(E)$ un espace métrique dont les points sont des ensembles.
- Complétude : toute suite de Cauchy converge dans l'espace ($\mathbb{R}^n$ oui, $\mathbb{Q}$ non).
- Banach : dans un espace complet, une contraction a un unique point fixe, atteint en itérant depuis n'importe où, avec une erreur en $k^n/(1-k)$.

Le théorème de Banach, une dernière fois



Espace complet	Ce qu'on y trouve comme point fixe
$I \subset \mathbb{R}$ fermé	le zéro cherché par la méthode de Newton
$(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d_H)$	une fractale (chapitre 3)
vecteurs de probabilité	le classement PageRank (chapitre 4)