Chapitre 1

Les transformations du plan

MAT-2901 — Mathématiques et technologie



Jérôme Soucy

Université Laval

Plan de l’exposé

1. Pourquoi commencer par là ?
2. Qu’est-ce qu’une transformation du plan ?
3. Composer sans jamais sortir de l’ensemble
4. Les transformations affines
5. Un catalogue d’applications affines
6. Coordonnées homogènes : le tour de passe-passe de l’infographie
7. Isométries et similitudes
8. Déterminer une transformation à partir de points
9. Les transformations dans l’enseignement secondaire québécois
10. Synthèse

Pourquoi commencer par là ?

Pourquoi les transformations, et pourquoi maintenant ?

- Ce cours porte sur des mathématiques **présentes dans la technologie** : compression d'images, cryptographie, fractales, moteurs de recherche, codes correcteurs.
- Les **transformations du plan** sont le premier objet mathématique de ce genre — et le plus visuel.
- Une image fractale entière (fougère, triangle de Sierpinski) tient dans quelques transformations affines : la figure est ce que ces transformations laissent invariant.

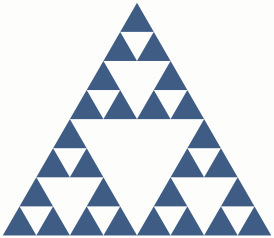


Figure 1.1 — Le triangle de Sierpinski : trois transformations affines, dix-huit nombres.

Un deuxième motif : le programme du secondaire

- Les transformations traversent **tout** le curriculum québécois : réflexion (primaire), translation/rotation (1^{re} sec.), homothétie (2^{e} sec.), langage vectoriel (5^{e} sec.).
- Réparties sur plusieurs années, elles sont introduites **une à une**, chacune avec son vocabulaire propre.
- L'élève termine avec quatre transformations apprises séparément, **sans avoir vu ce qu'elles ont en commun**.
- Cette synthèse n'a pas lieu au secondaire — mais elle doit avoir eu lieu **chez son enseignant**. C'est l'objet de ce chapitre.

Note historique — le programme d'Erlangen (Klein, 1872)



Felix Klein (1849–1925).

Klein propose de distinguer les géométries non par leurs axiomes, mais par leurs **transformations** : l'étude des propriétés d'une figure qui restent inchangées sous les transformations d'un certain groupe.

- Groupe des **isométries** : longueurs, angles, aires — géométrie euclidienne du secondaire.
- Groupe des **similitudes** : angles et *rapports* de longueurs — figures semblables.
- Groupe des **transformations affines** : alignement, parallélisme, rapports sur une même droite.
- Toutes les déformations continues : propriétés topologiques seulement.

Plus le groupe est grand, moins on conserve de choses — mais ce qui reste est plus profond. C'est cette hiérarchie qui organise le chapitre.

Qu’est-ce qu’une transformation du plan ?

Le plan euclidien

On travaille dans le **plan euclidien** $\Pi = \mathbb{R}^2$: un ensemble de points, muni d'une distance $d(P, Q)$.

$$P = (x, y) \qquad \text{ou} \qquad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Tout ce qui suit repose sur **une seule** définition.

Définition 1.1 — Transformation géométrique du plan

Définition 1.1 — Transformation géométrique du plan

Une **transformation géométrique** du plan est une **bijection** du plan dans lui-même : une fonction bijective $f : \Pi \longrightarrow \Pi$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de toutes les transformations du plan.

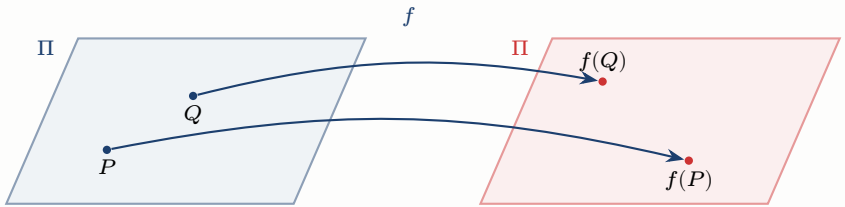


Figure 1.2

Décortiquer la définition

« Fonction » exige :

(i) f **partout définie** : chaque point P a une image ;

(ii) f **univoque** : une seule image par point.

« Bijective » ajoute, **indépendamment** :

(iii) **injectivité** : $P \neq Q \Rightarrow f(P) \neq f(Q)$;

(iv) **surjectivité** : tout Q possède un antécédent.

Quatre conditions indépendantes : les exemples qui suivent montrent chacune de leurs violations possibles.

Pour la classe 1.1 — Trois mises en garde de vocabulaire

Pour la classe — Trois mises en garde de vocabulaire

1. Si $Q = f(P)$: Q est l'**image** de P, P un **antécédent** de Q.
2. « P s'est déplacé en Q » est une façon de parler commode — mais **les points ne bougent pas**. Une transformation est une *correspondance*, pas un mouvement.
3. Une transformation agit sur **tout** le plan, pas seulement sur la figure dessinée. « Faire tourner un triangle », c'est en réalité faire tourner le plan tout entier.

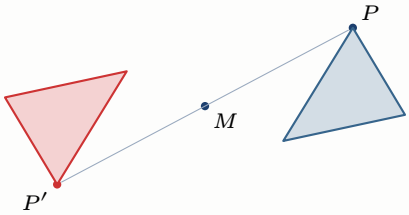
Exemples, et surtout contre-exemples

Rien ne clarifie mieux une définition que des objets qui n'y satisfont pas de justesse.

Exemple 1.1 — Une symétrie centrale

Exemple 1.1

Soit M fixe. $f_1(P) = P'$, l'unique point tel que M soit le milieu de $[PP']$. **C'est une transformation** : chaque point a exactement une image, et chaque point est l'image d'exactement un point.

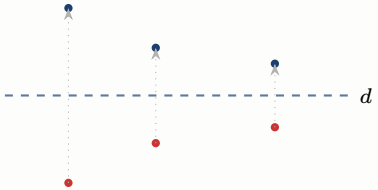


C'est la **symétrie centrale** de centre M : cas particulier d'une homothétie de rapport négatif (section 3).

Exemple 1.2 — Un repliage du plan

Exemple 1.2

Soit d fixe. f_2 laisse fixe le côté « nord » de d, et envoie le côté « sud » sur son réfléchi. C'est l'effet de replier une feuille sur d.

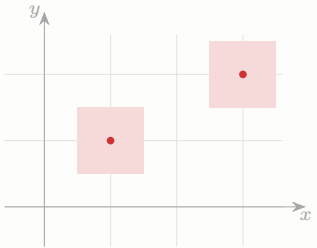


Ce n'est PAS une transformation : ni injective (deux antécédents au nord), ni surjective (rien n'atteint le sud).

Exemple 1.3 — L'arrondi au pixel près

Exemple 1.3

$f_3(x, y) =$ le point à coordonnées entières le plus proche. C'est ce que fait un écran en affichant une image sur sa grille de pixels.



Ce n'est PAS une transformation : un carré entier s'écrase sur un point (pas injective), et les points non entiers ne sont jamais atteints (pas surjective).

Composer sans jamais sortir de l’ensemble

Définition 1.2 — Égalité et composition

Définition 1.2 — Égalité et composition

Pour $f, g \in \mathcal{T}$: $f = g$ si et seulement si $f(P) = g(P)$ pour tout P. La **composée** $f \circ g$ est définie par

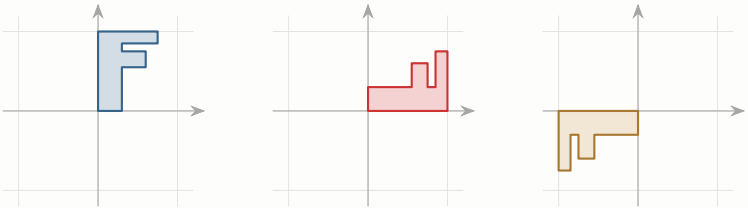
$$(f \circ g)(P) = f\big(g(P)\big).$$

Attention à l'ordre : dans $f \circ g$, c'est g qui agit *en premier*. Source d'erreurs constante — et difficulté classique au secondaire.

La composée de deux transformations est encore une transformation (il suffit de vérifier les quatre conditions de la définition 1.1).

Exemple 1.4 — La composition n'est pas commutative

r = rotation de $90°$ à l'origine ; R = réflexion d'axe des x. Même motif, deux ordres de composition :



Les deux images sont symétriques par rapport à l'origine : $r \circ R \neq R \circ r$.

Théorème 1.1 — Propriétés de $(\mathcal{T}, \circ)$

Théorème 1.1 — Propriétés de $(\mathcal{T}, \circ)$

Pour $f, g, h \in \mathcal{T}$:

(i) **fermeture** : $f \circ g \in \mathcal{T}$;

(ii) **associativité** : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;

(iii) **identité** : $\mathrm{id} \in \mathcal{T}$, $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$;

(iv) **inverse** : il existe $f^{-1} \in \mathcal{T}$ tel que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.

En général $f \circ g \neq g \circ f$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Idée : la fermeture se vérifie directement sur les 4 conditions ; l'associativité vaut pour toute composition de fonctions ; l'inverse existe car f est bijective, par définition.

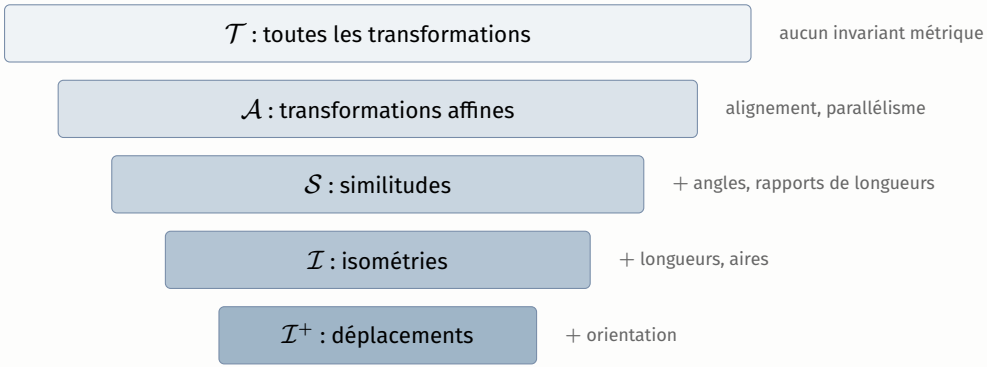
Remarque 1.1 — Inverser une composée

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \qquad \text{(l'ordre s'inverse !)}$$

Image classique : « mettre ses bas » puis « mettre ses souliers ». Pour défaire, on enlève d'abord les souliers.

Fermeture, associativité, identité, inverse : les quatre axiomes d'un **groupe**. On dira d'un ensemble de transformations qu'il est un **sous-groupe** de $\mathcal{T}$ s'il est stable par composition et par inversion. (Théorie complète : MAT-2903.)

Figure 1.3 — La hiérarchie des groupes de transformations



Plus on descend, plus le groupe est petit, plus il conserve de propriétés. C'est la lecture « à la Klein » — et c'est le plan du chapitre.

Remarque 1.3 — Où sont les applications affines non inversibles ?

Chaque famille de la figure 1.3 est emboîtée dans $\mathcal{T}$: par définition, elle n'est faite que de **bijections**. Il existe pourtant des *applications* affines non bijectives (ex. une projection) : elles ne préservent en général **ni l'alignement ni le parallélisme**, et ne figurent dans *aucune* des familles de la figure — n'étant pas bijectives, elles ne sont même pas dans $\mathcal{T}$.

« Affine » n'implique pas l'inversibilité ; « transformation affine », si.

Les transformations affines

Du plan géométrique au plan des coordonnées

Jusqu'ici, tout a été dit sans calcul (point de vue *synthétique*). On choisit maintenant un repère : chaque point devient un couple de nombres, chaque transformation devient une formule (point de vue *analytique*).

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

On confond volontairement point P et vecteur $\overrightarrow{OP}$ (même colonne de nombres) — abus commode et universel en infographie. Cela explique pourquoi une translation n'est **pas** une application linéaire.

Définition 1.3 — Application affine du plan

Définition 1.3 — Application affine du plan

Une **application affine** du plan est $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{t}, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\,.$$

A : **partie linéaire** ; $\mathbf{t}$: **partie translation**.

Une application affine = une application linéaire **suivie d'une translation**. Cette phrase anodine décrit exactement les translations, rotations, réflexions, homothéties, cisaillements — et leurs compositions.

Remarque 1.5 — Pourquoi « affine » et non « linéaire » ?

Une application linéaire T vérifie $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$: elle fixe l'origine. Une translation ne fixe **aucun** point : les translations ne sont donc pas linéaires. On ajoute le terme **t** précisément pour les inclure — d'où « affine ».

(Un tour de passe-passe — les coordonnées homogènes — permettra de récupérer la linéarité, au prix d'une dimension : voir section 5.)

Vocabulaire fixé pour tout le chapitre :

- **application affine** : n'importe quelle fonction de cette forme, *sans condition sur* A ;
- **transformation affine** : une application affine **bijective**, i.e. un élément de $\mathcal{A}$.

Proposition 1.2 — Inversibilité

Une application affine de partie linéaire A, translation $\mathbf{t}$, est bijective si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Alors

$$w^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1}\mathbf{t}.$$

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Idée : $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible $\Leftrightarrow A$ injective (algèbre linéaire) ; on vérifie directement que la formule proposée est une réciproque.

Conséquence. Les applications affines inversibles forment un sous-groupe $\mathcal{A}$ de $\mathcal{T}$: le **groupe affine** du plan.

Proposition 1.3 — Ce qu'une transformation affine conserve

Proposition 1.3

Soit w une transformation affine. Alors :

1. l'image d'une droite est une droite ;
2. l'image d'une droite par l'origine passe par (e, f) ;
3. l'image de deux droites parallèles reste parallèle ;
4. l'image d'un segment est un segment ; le milieu va sur le milieu ;
5. plus généralement : w préserve les rapports de longueurs *sur une même droite* ;
6. l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Idée : écriture paramétrique d'une droite, $P + s\mathbf{u}$; $w(P + s\mathbf{u}) = w(P) + s(A\mathbf{u})$, et $A\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ car A est inversible.

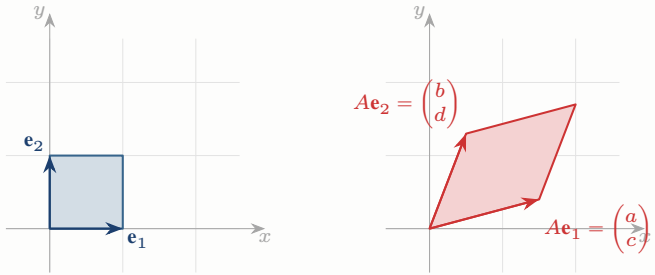
Remarque 1.6 — Ce qu'elle ne conserve *pas*

Une transformation affine ne préserve **en général** ni les longueurs, ni les angles, ni la perpendicularité, ni les rapports de longueurs entre deux directions différentes. Un carré peut devenir un parallélogramme quelconque ; un cercle devient une ellipse.

En revanche, elle multiplie **toutes** les aires par le même facteur (à venir).

Visualiser : l'image du carré unité

Le geste le plus utile du chapitre : pour comprendre une transformation, regarder ce qu'elle fait au carré unité $[0,1] \times [0,1]$. Les **colonnes de** A sont les images de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$: le carré devient le parallélogramme qu'elles engendrent.



le carré unité

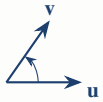
son image par A

Figure 1.4

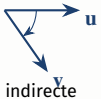
Définition 1.4 — Orientation

Définition 1.4 — Orientation d'une base, du plan

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est **directe** si l'on passe de $\mathbf{u}$ à $\mathbf{v}$, par le plus petit angle, dans le sens trigonométrique ; **indirecte** sinon. w **préserve l'orientation** si elle envoie toute base directe sur une base directe ; elle la **renverse** sinon.



base directe



base indirecte

Proposition 1.4 — Aire et déterminant

Proposition 1.4 — Aire et déterminant

Soit w affine de partie linéaire A, et D une région d'aire S. Alors $\mathrm{Aire}(w(D)) = |\det(A)| \cdot S$. Si $\det(A) \neq 0$: w préserve l'orientation si $\det(A) > 0$, la renverse si $\det(A) < 0$.

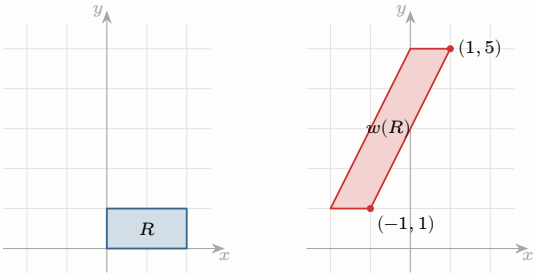
(Admis — relève du théorème du changement de variables. Intuition : vrai pour le carré unité par définition du déterminant, donc pour tout carré du quadrillage, donc pour toute région raisonnable.)

Pour la classe — Le F est-il à l'endroit ?

Le signe du déterminant : $\det(A) > 0$, la figure se lit dans le même sens ; $\det(A) < 0$, elle est retournée comme dans un miroir. D'où l'usage d'un motif en « F » dans les figures : un F retourné se repère au premier coup d'œil.

Exemple 1.5 — Image d'un rectangle

$w\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $R = [0,2] \times [0,1]$. Il suffit de calculer l'image des 4 sommets (prop. 1.3).



Vérification par les aires : $\det(A) = 2$, aire de R = 2, donc aire de $w(R) = 4$ (confirmé).

Exemple 1.6 — Image d'un triangle

Même w. Triangle plein $A = (1, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (-1, 1)$ (isocèle) $\longmapsto$ triangle plein $(-1, 3)$, $(-1, 1)$, $(-3, -1)$ (**pas** isocèle).

Une transformation affine ne respecte pas les longueurs.

Un catalogue d’applications affines

Les briques du chapitre

On passe en revue les applications affines élémentaires — toutes des transformations, sauf la dernière (la projection). Ce sont les briques : toute application linéaire inversible du plan s'obtient en les composant (théorème de décomposition, plus loin).

Convention de notation, valable pour tout le chapitre : rotations en r minuscule, réflexions en R majuscule. r_θ / R_θ : centrées à l'origine. $r_{M,\theta}$ / R_d : centre ou axe précisé explicitement — **un indice à deux éléments**.

Un catalogue d'applications affines

Translations

Définition 1.5 — Translation

Définition 1.5 — Translation

La **translation** de vecteur $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ est

$$t_{\mathbf{t}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Partie linéaire = identité : aires et orientation préservées — première isométrie. Composer deux translations donne une translation, et **l'ordre n'y change rien** : $t_{\mathbf{u}} \circ t_{\mathbf{v}} = t_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}}$.

Un catalogue d'applications affines

Homothéties

Définition 1.6 — Homothétie de centre l'origine

Définition 1.6

L'**homothétie** de centre $\mathbf{0}$, rapport $c \in \mathbb{R}^\star$: $h_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $0 < c < 1$: contraction uniforme; $c > 1$: dilatation uniforme; $c < 0$: retourne la figure (h_{-1} = symétrie centrale).

$\det(cI) = c^2 > 0$: une homothétie ne renverse **jamais** l'orientation, même si $c < 0$ — excellent sujet de discussion en classe.

Proposition 1.5 — Homothétie de centre quelconque

Proposition 1.5

L'homothétie de centre $M = (h, k)$, rapport c : $h_{M,c} = t_{\mathbf{m}} \circ h_c \circ t_{-\mathbf{m}}$,

$$h_{M,c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx + h(1-c) \\ cy + k(1-c) \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Technique de la **conjugaison** (sert partout) : on ramène le centre à l'origine, on fait la transformation, on revient. $P \mapsto P - \mathbf{m} \mapsto c(P - \mathbf{m}) \mapsto c(P - \mathbf{m}) + \mathbf{m}$.

Pour la classe 1.3 — Lire une formule du secondaire

Pour la classe — Lire une formule du secondaire

$(x, y) \mapsto (cx + h(1-c), cy + k(1-c))$ — exactement la formule de 2e secondaire. Vue comme $t_{\mathbf{m}} \circ h_c \circ t_{-\mathbf{m}}$: « je vais au centre, j'agrandis, je reviens » — rien à retenir.

Un catalogue d'applications affines

Rotations

Définition 1.7 — Rotation de centre l'origine

Définition 1.7

La **rotation** d'angle θ, sens antihoraire, autour de l'origine : $r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

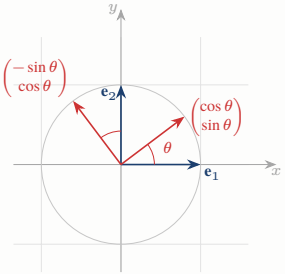


Figure 1.5. $\det(r_\theta) = 1$: aires et orientation préservées.

Remarque 1.7 — Un ou deux indices ?

Un indice **seul**, comme r_θ : centrée à **l'origine**. Dès que le centre n'est pas l'origine, on le place en **premier** indice : $r_{M,\theta}$ — l'indice porte alors sur *deux* objets, jamais sur l'angle seul. Même lecture pour h_c / $h_{M,c}$ et R_θ / R_d.

$$r_{M,\theta}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = r_\theta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \mathbf{m}\right) + \mathbf{m} = r_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (I - r_\theta)\,\mathbf{m}$$ (conjugaison, encore.)

Proposition 1.6 — Composer deux rotations de même centre

Proposition 1.6

Pour M quelconque : $r_{M,\alpha}\, r_{M,\beta} = r_{M,\alpha+\beta} = r_{M,\beta}\, r_{M,\alpha}$, et $r_{M,\theta}^{-1} = r_{M,-\theta}$.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Idée : cas $M = \mathbf{0}$ par produit matriciel (les formules d'addition d'angles apparaissent) ; cas général par conjugaison, ramené au premier cas.

Pour la classe — Un cadeau pour la classe

La démonstration (cas $M = \mathbf{0}$) est une preuve de $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ — la plus courte qui soit, et elle explique *pourquoi* : reflet d'un produit de matrices. À garder pour la 5e secondaire.

Un catalogue d'applications affines

Réflexions

Définition 1.8 — Réflexions

Définition 1.8 — Réflexions par rapport aux axes

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (axe des x), $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (axe des y).

Plus généralement, réflexion d'axe passant par l'origine, angle θ avec l'axe des x :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

$\det(R_\theta) = -1$: une réflexion renverse toujours l'orientation (intuition du miroir). $\theta = 0$: H. $\theta = \pi/4$: réflexion d'axe $y = x$, matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (échange les coordonnées).

Remarque 1.8 — L'angle double

Le 2θ n'est **pas** une coquille : faire tourner le *miroir* de θ fait tourner l'*image* de 2θ. Même phénomène : la composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation d'angle **double** de l'angle des axes (théorème 1.13, plus loin) — l'un des plus beaux résultats à faire découvrir au secondaire.

Un catalogue d’applications affines

Cisaillements et contractions non uniformes

Définition 1.9 — Cisaillement

Définition 1.9

Cisaillement horizontal de rapport m : $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Cisaillement vertical** de rapport m : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$.

Le cisaillement horizontal laisse fixe l'axe des x et fait glisser chaque droite horizontale proportionnellement à sa hauteur — un paquet de cartes qui penche. $\det = 1$: **un cisaillement conserve les aires**, en déformant complètement angles et longueurs.

Pour la classe — Le cisaillement et l'aire du parallélogramme

« Aire = base $\times$ hauteur » : un cisaillement bien choisi transforme le parallélogramme en un rectangle de même base et hauteur, en conservant l'aire. C'est exactement ce que l'on fait au secondaire en découpant un triangle et en le déplaçant — sans savoir qu'on vient de faire un cisaillement.

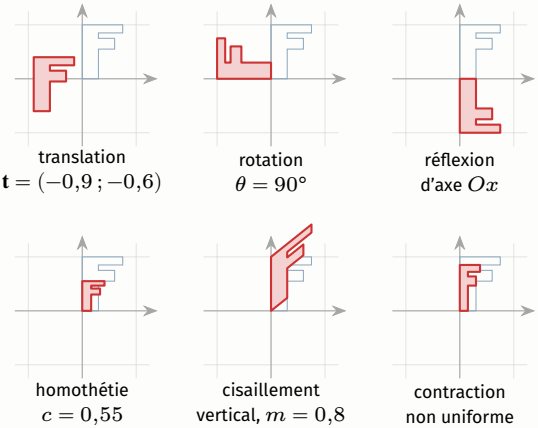
Définition 1.10 — Contraction non uniforme

Définition 1.10

Application linéaire $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

Si $a \neq b$: contracte davantage dans une direction — un cercle devient une ellipse. Avec $a > 1$, $0 < b < 1$: dilatation horizontale et contraction verticale. Essentielles dans la construction des fractales *auto-affines* (fougère de Barnsley).

Figure 1.6 — Le catalogue en images



Le « F » : seule la réflexion renverse l'orientation.

Table 1.1 — Récapitulatif

Transformation	Matrice A	$\det(A)$	Isométrie ?
Translation	I	1	oui
Rotation d'angle θ	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	1	oui
Réflexion d'axe θ	$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$	-1	oui
Homothétie de rapport c	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	c^2	si $\lvert c\rvert = 1$
Cisaillement de rapport m	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	non (sauf $m = 0$)
Contraction non uniforme	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$	ab	non (sauf $\lvert a\rvert = \lvert b\rvert = 1$)
Projection sur $y = x$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	0	non (non inversible)

Un catalogue d'applications affines

Le cas non inversible

Le cas non inversible

On considère parfois des applications affines qui ne sont pas des transformations : $\det(A) = 0$. Tout le plan est alors écrasé sur une droite ($A \neq 0$) ou un point ($A = 0$).

Exemple 1.7 — La projection orthogonale sur $y = x$

$p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\det = 0$: toutes les aires sont écrasées à zéro. Notez $p \circ p = p$.

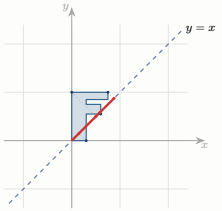


Figure 1.7 — Le motif tout entier écrasé sur un segment. Pas une transformation du plan.

Un catalogue d'applications affines

Le théorème de décomposition

Théorème 1.7 — Décomposition

Théorème 1.7 — Décomposition des applications linéaires

Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ est inversible si et seulement si elle est une composition d'homothéties, de rotations, de réflexions, de cisaillements et de contractions/dilatations non uniformes.

C'est la version géométrique d'un fait d'algèbre linéaire : toute matrice inversible est un produit de matrices élémentaires. Cisaillements $\leftrightarrow$ addition d'un multiple d'une ligne à une autre ; contractions non uniformes $\leftrightarrow$ multiplication d'une ligne par un scalaire ; réflexion d'axe $y = x \leftrightarrow$ échange de deux lignes. **Gauss–Jordan est une décomposition géométrique.**

Polaire : $A = QS$ (rotation/réflexion, puis déformation symétrique positive). *SVD* : $A = U\Sigma V^\top$ — « une rotation, un étirement selon les axes, une rotation ». Explique pourquoi un cercle devient toujours une ellipse.

Coordonnées homogènes : le tour de passe-passe de l'infographie

Le problème

Composer deux applications affines est pénible :

$$(w_2 \circ w_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A_2 A_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (A_2 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)$$

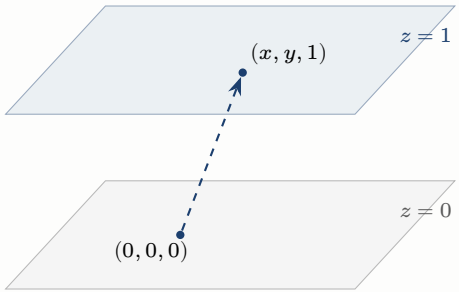
— une règle pour A, une autre pour $\mathbf{t}$. Sur une carte graphique qui compose des milliers de transformations par image, ce n'est pas acceptable.

L'astuce : plonger le plan dans $\mathbb{R}^3$, à la hauteur $z = 1$: $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$.

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La translation devient une multiplication matricielle : l'affine est redevenue linéaire, une dimension plus haut.

Figure 1.8 — Points et vecteurs, en coordonnées homogènes



le plan des points, relevé à la hauteur 1

le plan des vecteurs (directions)

Les points vivent à $z = 1$, les vecteurs (directions) à $z = 0$. La distinction point/vecteur redevient visible.

Les avantages

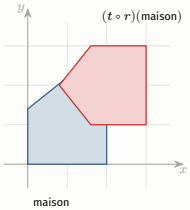
1. **Composer, c'est multiplier.** La matrice de $w_2 \circ w_1$ est le produit des deux matrices 3×3, dans cet ordre. Une seule règle au lieu de deux.
2. **Inverser, c'est inverser.** La matrice de w^{-1} est l'inverse de la matrice 3×3.
3. **La distinction point/vecteur revient.** Point = $(x, y, 1)$; vecteur = $(x, y, 0)$. La différence de deux points donne un vecteur ; une translation ne change pas un vecteur.
4. **On peut aller plus loin.** En autorisant la troisième ligne à différer de $(0, 0, 1)$: transformations *projectives*, celles de la perspective en 3D.

Exemple 1.8 — Faire pivoter, puis glisser, une maison

Maison de sommets $(0,0), (2,0), (2,1{,}4), (1,2{,}2), (0,1{,}4)$. r = rotation $\pi/2$, puis t = translation $(3,1)$:

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_t M_r = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Coin $(2,0) = (2,0,1)$: $M_t M_r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ — identique au calcul affine direct $r_{\pi/2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, en une seule multiplication.



Attention à l'ordre, encore

En composant dans l'autre ordre, $r \circ t$ (glisser, puis tourner) :

$$M_r M_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq M_t M_r.$$

La composition en coordonnées homogènes n'échappe pas à la remarque 1.1.

Un personnage qui bouge dans un jeu vidéo, un bras de robot, une image redressée, une carte qui pivote : des produits de matrices 3×3 calculés par millions et par seconde — l'application des mathématiques du secondaire la plus omniprésente et la moins connue des élèves.

Isométries et similitudes

On descend d'un cran dans la hiérarchie

Parmi les transformations affines, celles qui intéressent le secondaire sont celles qui respectent la *forme* des figures.

Définition 1.11 — Similitude, isométrie, contraction

w affine est une **similitude** de rapport $k > 0$ si

$$\|w(P) - w(Q)\| = k\,\|P - Q\| \qquad \forall P, Q.$$

$k = 1$: **isométrie**. $0 < k < 1$: **contraction**.

C'est la définition de « figures semblables » du secondaire, énoncée comme propriété de la *transformation*, non d'un couple de figures.

Propositions 1.8 et 1.9

Proposition 1.8 — Il suffit de regarder la partie linéaire

w affine de partie linéaire A est une similitude de rapport k ssi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en est une, même rapport. (La translation disparaît dans la différence $w(P) - w(Q)$.)

Proposition 1.9 — Une composition de similitudes est une similitude

w_1, w_2 similitudes de rapports $k_1, k_2 \Rightarrow w_2 \circ w_1$ similitude de rapport $k_1 k_2$.

Conséquence. Les similitudes forment un sous-groupe $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$, les isométries un sous-groupe $\mathcal{I}$ de $\mathcal{S}$: la figure 1.3 est maintenant justifiée.

Isométries et similitudes

L’anatomie des similitudes

L'anatomie des similitudes

Homothéties, rotations, réflexions, translations sont des similitudes, donc toutes leurs compositions aussi. On **admet** la réciproque : ce sont les seules — la partie linéaire d'une similitude de rapport k est toujours $k\,r_\theta$ (directe) ou $k\,R_\theta$ (indirecte), pour un certain θ. (Démonstration complète hors cadre du cours.)

Propositions 1.10 et 1.11

Proposition 1.10 — Déterminant d'une similitude

w similitude de rapport k, partie linéaire A : $\det(A) = k^2$ ou $-k^2$. Donc $|\det(A)| = k^2$, et w est une contraction ssi $|\det(A)| < 1$.

Proposition 1.11 — Aires et rapport de similitude

Si w est une similitude de rapport k et D une région du plan : $\mathrm{Aire}(w(D)) = k^2 \ \mathrm{Aire}(D)$.

Pour la classe — Le fameux k^2

« Si on double les dimensions, l'aire $\times 4$ » — l'un des résultats les plus mal compris du secondaire. Deux preuves : le déterminant (prop. 1.4), ou le fait qu'une aire est un produit de deux longueurs, chacune $\times k$. Dimension 3 : k^3 pour les volumes.

Exemple 1.9 — Reconnaître une similitude

$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 \\ a & 0{,}6 \end{pmatrix}$ n'est **jamais** une similitude ($\|A\mathbf{e}_1\| \geq 0{,}8 \neq 0{,}6 = \|A\mathbf{e}_2\|$, contradiction).

$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & \alpha \\ \beta & 0{,}5 \end{pmatrix}$: similitude pour $\alpha = \beta = 0$ (homothétie $\frac{1}{2}$) et pour $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ — on reconnaît la matrice $r_{-\pi/3}$: **c'est même une isométrie** ($k = 1$).

Isométries et similitudes

Classification des isométries du plan

Théorème 1.12 — Les quatre isométries du plan

Théorème 1.12 (admis sans démonstration)

Toute isométrie du plan est :

1. une **translation** (identité incluse) ;
2. une **rotation** autour d'un point ;
3. une **réflexion** par rapport à une droite ;
4. une **réflexion glissée** : réflexion suivie d'une translation parallèle à l'axe.

Table 1.2 — Les isométries, résumé

Isométrie	$\det(A)$	Points fixes	Nom au secondaire
Identité	$+1$	tout le plan	—
Translation	$+1$	aucun	translation
Rotation	$+1$	un seul point	rotation
Réflexion	-1	une droite	réflexion
Réflexion glissée	-1	aucun	(absente du programme)

Pour la classe — La grande absente

La réflexion glissée ne figure pas au programme québécois. Elle explique les traces de pas dans la neige, la disposition des feuilles, plusieurs frises. La liste « translation, rotation, réflexion » que retiennent les élèves est **incomplète** : composer une réflexion et une translation donne, en général, quelque chose qui n'est aucune des trois.



Figure 1.9 — Une frise engendrée par une réflexion glissée.

Isométries et similitudes

Tout se ramène aux réflexions

Théorème 1.13 — Composée de deux réflexions

Théorème 1.13

Soient d_1, d_2, R_1, R_2 les réflexions correspondantes.

1. Si $d_1 \parallel d_2$: $R_2 \circ R_1$ = translation de vecteur $2\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ perpendiculaire de d_1 à d_2.
2. Si d_1, d_2 se coupent en M, angle φ : $R_2 \circ R_1$ = rotation de centre M, angle 2φ.

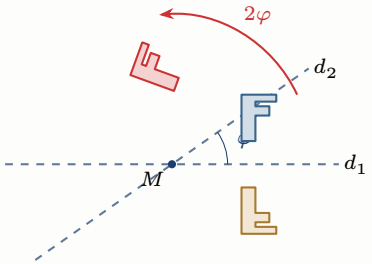


Figure 1.10

Corollaire 1.14, et une leçon de didactique

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION — AU TABLEAU

Cas 2 : quitte à translater, $M = \mathbf{0}$; par $R_{\alpha+\varphi} R_{\alpha}$, développement trigonométrique $\Rightarrow r_{2\varphi}$.

Corollaire 1.14 — Trois réflexions suffisent

Toute isométrie du plan est la composée d'au plus **trois** réflexions.

Pour la classe — Une leçon de didactique

La réflexion n'est pas une transformation « parmi d'autres » : c'est *la* transformation fondamentale, qui engendre toutes les autres. On peut faire vivre ce résultat avec deux miroirs, ou deux pliages successifs : les élèves découvrent expérimentalement que deux réflexions donnent une rotation d'angle double de l'angle entre les plis.

Déterminer une transformation à partir de points

La question inverse

Jusqu'ici : « voici une transformation, que fait-elle à cette figure ? ». Maintenant, la question qui se pose **en pratique** : « voici une figure et son image, quelle transformation les relie ? » — le problème que résout un logiciel de retouche photo, ou de reconnaissance de formes.

Théorème 1.15 — Trois points suffisent

Théorème 1.15

P_1, P_2, P_3 **non alignés**, et Q_1, Q_2, Q_3 quelconques. Il existe une **unique** application affine w telle que $w(P_i) = Q_i$, $i = 1, 2, 3$.

Surnommée **méthode du bulldozer** : on écrit toutes les conditions et on pousse tout dans un système linéaire.

DÉMONSTRATION AU TABLEAU

Idée : le système à 6 inconnues (a, b, c, d, e, f) se **découple** en deux systèmes 3×3 de même matrice

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(M) = 2 \cdot \text{aire orientée}(P_1P_2P_3) \neq 0.$$

Remarque 1.11 — Une écriture plus compacte

En coordonnées homogènes, tout tient sur une ligne. Avec $\widetilde{P}, \widetilde{Q}$ les matrices 3×3 des points (en colonnes, ligne du bas = 1) :

$$\widetilde{W} = \widetilde{Q}\,\widetilde{P}^{-1}.$$

C'est la formule qu'implémentent les bibliothèques d'infographie.

Exemple 1.10 — Le problème des deux triangles

$A = (-11, 3)$, $B = (1, 12)$, $C = (-1, 14) \longmapsto P = (90, -68)$, $Q = (69, -53)$, $R = (83, -59)$.

$$w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 37 \\ -43 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = -2$: renverse l'orientation, double les aires. Ni une isométrie, ni une similitude ($A^\top A$ n'est pas multiple de I).

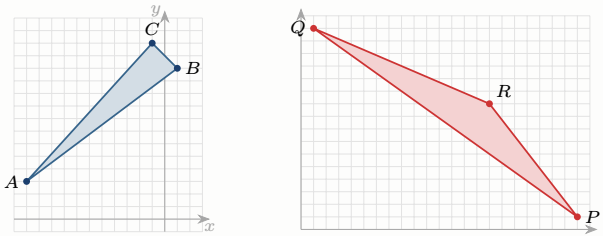


Figure 1.11 — Le problème du bulldozer.

Remarque 1.12 — Combien de points pour quel groupe ?

Analogues du théorème 1.15 pour les sous-groupes :

- une **similitude** est déterminée par l'image de **deux** points distincts (à ceci près : deux solutions, directe/indirecte) ;
- une **isométrie**, pareil ;
- une **translation**, par l'image d'**un seul** point.

Le nombre de points nécessaires mesure la « taille » du groupe — une manière concrète de faire sentir qu'une rotation est « plus riche » qu'une translation.

Les transformations dans l’enseignement secondaire québécois

Cette section vous concerne le plus directement

Trois objectifs : situer les transformations dans le programme québécois, traduire la notation du secondaire dans le langage matriciel de ce chapitre, et recenser ce que le point de vue supérieur apporte concrètement dans une classe.

Les transformations dans l'enseignement secondaire québécois

Où sont-elles dans le programme ?

Table 1.3 — Parcours dans le curriculum québécois

Niveau	Ce qui est en jeu
Primaire, 3^{e} cycle	Réflexion, axe de symétrie ; frises et dallages ; vocabulaire informel, pliage et miroir.
1^{re} secondaire	Translation, rotation, réflexion ; construction de l'image d'une figure ; figures isométriques.
2^{e} secondaire	Homothétie ; figures semblables ; rapport de similitude.
3^{e} secondaire	Conditions minimales d'isométrie et de similitude ; rapports k, k^2, k^3 pour longueurs, aires, volumes.
4^{e} secondaire	Géométrie analytique : distance, point de partage, droites.
5^{e} secondaire (SN)	Vecteurs : la translation devient enfin *un vecteur*.

Deux observations : (1) même ordre que la hiérarchie de Klein (fig. 1.3) — isométries, puis similitudes, jamais l'affine général. (2) La synthèse n'a **jamais lieu** au secondaire : transformations et vecteurs restent deux mondes séparés. C'est vous qui apporterez ce lien.

Les transformations dans l'enseignement secondaire québécois

Traduire la notation du secondaire

Table 1.4 — Dictionnaire des notations

Secondaire	Se lit	Représentation analytique
$t_{(a,b)}$	translation de (a, b)	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
$r_{O,\theta}$	rotation de centre O, angle θ	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto r_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$r_{M,\theta}$	rotation de centre M	$r_\theta \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathbf{m} \right) + \mathbf{m}$
s_d	réflexion d'axe d	$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si d passe par O
$h_{O,k}$	homothétie de centre O, rapport k	$k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$h_{M,k}$	homothétie de centre M	$k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-k)\mathbf{m}$

Seule ligne à retenir : s_d (« symétrie ») au secondaire = R_d (« réflexion ») dans ce cours.

Pour la classe 1.9 — Une notation à défendre

Pour la classe — Une notation à défendre

On reproche parfois à cette notation d'être lourde. Elle a pourtant un mérite considérable : elle traite la transformation comme un **objet** qu'on peut nommer, comparer, composer — plutôt qu'une action qu'on exécute. C'est le saut conceptuel que la didactique identifie comme le plus difficile : passer de la transformation-*procédé* à la transformation-*objet*. Résistez à la tentation de l'abandonner.

Les transformations dans l'enseignement secondaire québécois

Ce que le point de vue matriciel vous donne

Six choses que le point de vue matriciel change (1/2)

Vous n'enseignerez pas de matrices au secondaire. Mais :

1. **Une seule idée au lieu de quatre.** Translation, rotation, réflexion, homothétie : quatre cas de $w\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \mathbf{t}$. « Existe-t-il d'autres transformations ? » — vous savez que oui, et lesquelles.
2. **Pourquoi l'ordre compte.** $r \circ R \neq R \circ r$: un fait d'**algèbre** (produit de matrices non commutatif), pas une bizarrerie géométrique.
3. **D'où vient le k^2.** Le déterminant — ou, simplement, une aire = produit de deux longueurs.

Six choses que le point de vue matriciel change (2/2)

4. **Pourquoi les conditions minimales fonctionnent.** CAC, ACA, CCC, AA… : mystérieuses comme axiomes. Le théorème 1.15 en donne la raison — une application affine est déterminée par 3 points, une similitude par 2.
5. **Le rôle central de la réflexion.** Le corollaire 1.14 : la réflexion engendre tout. Justifie de lui donner plus de temps, et de manipuler des miroirs.
6. **La liste des trois transformations est incomplète.** La réflexion glissée existe — savoir ce qui manque évite une fausseté.

Les transformations dans l'enseignement secondaire québécois

Les difficultés d'apprentissage, et d'où elles viennent

Des obstacles bien documentés (1/2)

Pas des erreurs de calcul : des **conceptions cohérentes mais fausses** que les élèves — et souvent les futurs enseignants — se construisent.

1. **Transformation vue comme un mouvement de la figure.** Remède : demander l'image de points isolés, et du quadrillage lui-même.
2. **Translation confondue avec « bouger sans tourner ».** Remède : construire la translation par les seules coordonnées.
3. **Centre de rotation toujours placé sur la figure.** Échec massif quand le centre est extérieur. Remède : la conjugaison (prop. 1.5), « je vais au centre, je tourne, je reviens ».

Des obstacles bien documentés (2/2)

4. **Homothétie réduite à un agrandissement.** $k < 0$ n'est pas imaginé. Remède : tracer des rapports négatifs, comparer systématiquement longueurs/aires/angles.
5. **« Semblable » compris comme « qui se ressemble ».** Remède : la définition 1.11 elle-même — *toutes* les distances multipliées par le *même* nombre.
6. **Niveau de van Hiele.** Le raisonnement visuel (« ça a l'air pareil ») ne produit pas de justification fondée sur les propriétés, même avec les bonnes réponses.

Pour la classe — Un test à faire passer

« Rotation de $90°$ autour d'un point M hors du triangle ABC. M a-t-il une image ? » — révèle presque à coup sûr la conception « mouvement ».

Les transformations dans l'enseignement secondaire québécois

Des activités qui tiennent la route

Cinq activités

1. **Deux miroirs.** Angle φ, compter les images — découverte expérimentale du théorème 1.13.
2. **La chasse aux symétries.** Logos, carrelages, flocons : compter rotations et réflexions.
3. **Le pantographe.** Homothétie manipulable (prop. 1.5) ; « où est le centre ? » devient concret.
4. **Programmer une transformation.** Écrire la fonction qui calcule l'image d'un point — force à expliciter que la transformation agit sur *tous* les points.
5. **La géométrie dynamique.** Construire, puis *déplacer* un sommet : ce qui reste invariant est ce que la transformation conserve.

Pour la classe — Une mise en garde sur les outils

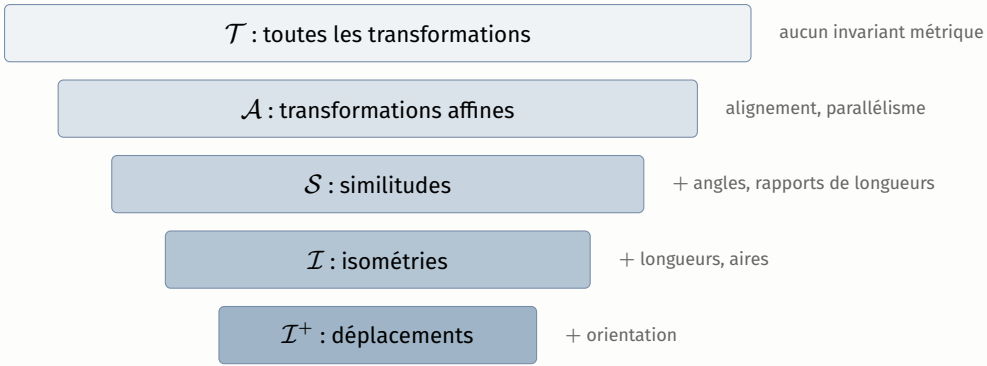
La géométrie dynamique et la programmation ne produisent pas automatiquement de la compréhension. Un élève peut faire glisser un curseur vingt minutes sans rien conclure. Ce qui fait apprendre, c'est la **prédiction** : écrire à l'avance ce que l'on croit obtenir, puis exécuter et comparer. Sans cette étape, l'outil ne fait que *montrer* ; avec elle, il *confronte*.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

- Une transformation = une **bijection** du plan ; toutes les transformations **affines** tiennent dans $w(P) = AP + \mathbf{t}$.
- Une chaîne de sous-groupes emboîtés $\mathcal{I}^+ \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{T}$: plus le groupe est petit, plus il conserve de propriétés (Klein).
- Le carré unité et ses colonnes-images : la façon la plus rapide de *voir* ce que fait une matrice.
- Les coordonnées homogènes rendent l'affine linéaire, une dimension plus haut — toute l'infographie repose là-dessus.
- Trois points déterminent une application affine ; deux points, une similitude ; un point, une translation.
- Toute isométrie est translation, rotation, réflexion ou réflexion glissée — et la réflexion engendre tout.

Figure 1.3, une dernière fois



Chaque étage de cette pyramide a été démontré (ou admis) aujourd'hui.

Et maintenant

- Les **démonstrations** laissées « au tableau » aujourd'hui sont toutes dans les notes de cours, avec tous les détails.
- Les **exercices** du chapitre (avec solutions complètes) couvrent chacun des résultats vus : à travailler avant le prochain cours.
- L'**annexe Python** des notes reprend en code toutes les idées centrales (le bulldozer, la reconnaissance d'une similitude, la décomposition d'une isométrie).